

Elementos de Física Universitaria

Sistemas de Partículas y Termodinámica

Mario I. Caicedo, Profesor Titular

Departamento de Física

Universidad Simón Bolívar

Prefacio

Escucho, olvido. Veo, recuerdo. Hago, aprendo.

Proverbio chino

Esto es un texto introductorio de física para ciencias e ingeniería basado en el uso intensivo del cálculo diferencial e integral. herramienta desarrollada independientemente por Isaac Newton y Leibniz en el siglo XVIII. El texto es apropiado para un curso de doce semanas con tres reuniones semanales de dos horas.

El texto sigue naturalmente la primera parte (correspondiente al curso FS1111) y comenzando el estudio de la mecánica de Newton con su extensión más sencilla luego del análisis detallado del oscilador armónico, esto es, con el estudio de un sistema de dos partículas y en términos del cambio al sistema de coordenadas del centro de masa. Seguidamente se estudia el problema de fuerzas centrales y luego de eso se entra de lleno en los sistemas de partículas. Hay un capítulo dedicado a la cinemática rotacional y otro dedicado a la dinámica de los cuerpos rígidos. El texto utiliza mayormente el sistema internacional de unidades (S.I.) pero a veces aparecen problemas formulados en el sistema imperial británico, en todos los cálculos se respeta (y se espera que el estudiante lo haga de la misma manera) el número de cifras significativas y las reglas de redondeo asociadas.

En el texto aparecen, bien indicados, algunos temas avanzados que el profesor puede presentar en clase o que el estudiante puede estudiar por su cuenta pero que no forman parte integral del texto.

Índice general

1. Movimiento Bajo la Acción de una Fuerza Central	4
1.1. El problema de dos cuerpos	4
1.2. Introducción al Momentum Angular	7
1.3. Ley de las Areas	9
1.4. Leyes de Kepler	11
1.4.1. Descubriendo la Ley de Gravitación Universal	13
1.4.2. La ley de “cubos y cuadrados”	15
1.5. Consideraciones energéticas: El Potencial Efectivo	17
1.6. Ejemplos	21
1.7. Complemento: Ecuación de la órbita	25
1.8. Complemento: El Problema de Kepler	27
1.9. Problemas propuestos	29
2. Sistemas de Partículas I	
Centro de Masa y Teorema del Momentum	31
2.1. Momentum Lineal	31
2.1.1. Centro de Masa	31
2.1.2. Densidad de masa	33

2.1.3.	¿Como calcular un diferencial de volumen I? (el caso plano)	35
2.1.4.	Aplicaciones	37
2.1.5.	¿Como calcular un diferencial de volumen II? (Objetos espaciales)	39
2.1.6.	Cálculo de centros de masas de figuras volumétricas	42
2.2.	Teorema del Momentum	43
2.3.	Energía Cinética de un Sistema	50
2.4.	El Referencial de Momentum Cero	53
3.	Cinemática de las Rotaciones	55
3.1.	Motivación	55
3.2.	El Carácter Vectorial de la Velocidad Angular	56
3.2.1.	Rotaciones en un plano	56
3.2.2.	Rotaciones alrededor de un eje arbitrario	59
3.3.	Problemas Propuestos	65
4.	Dinámica de los Cuerpos Rígidos	66
4.1.	Motivación	66
4.2.	Momentum Angular	66
4.3.	Momento de Inercia	71
4.4.	Energía cinética de un Rígido	74
4.5.	Torque	75
4.6.	Complemento: ¿Qué pasa si no hay simetría?	80

Capítulo 1

Movimiento Bajo la Acción de una Fuerza Central

1.1. El problema de dos cuerpos

Comenzaremos este capítulo estudiando la dinámica de un sistema de dos partículas completamente aislado, en vista de lo cual, las ecuaciones de movimiento para cada partícula son ecuaciones de movimiento son

$$m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 = \mathbf{F}_{21} \quad (1.1)$$

$$m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2 = \mathbf{F}_{12} \quad (1.2)$$

Vamos a mostrar que es posible presentar estas mismas ecuaciones de manera mucho más conveniente, con este fin empecemos por dividir ambas ecuaciones por la masa total del sistema $M = m_1 + m_2$ y sumémoslas para obtener

$$\frac{m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2}{M} = \frac{\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12}}{M} = 0 \quad (1.3)$$

ó, usando la tercera ley de Newton,

$$\frac{m_1 \ddot{\mathbf{R}}_1 + m_2 \ddot{\mathbf{R}}_2}{M} = \frac{\mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_{12}}{M} = 0 \quad (1.4)$$

si se define

$$\mathbf{R} \equiv \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{M} \quad (1.5)$$

la ecuación (1.4) puede reexpresarse como

$$\ddot{\mathbf{R}} = 0 \quad (1.6)$$

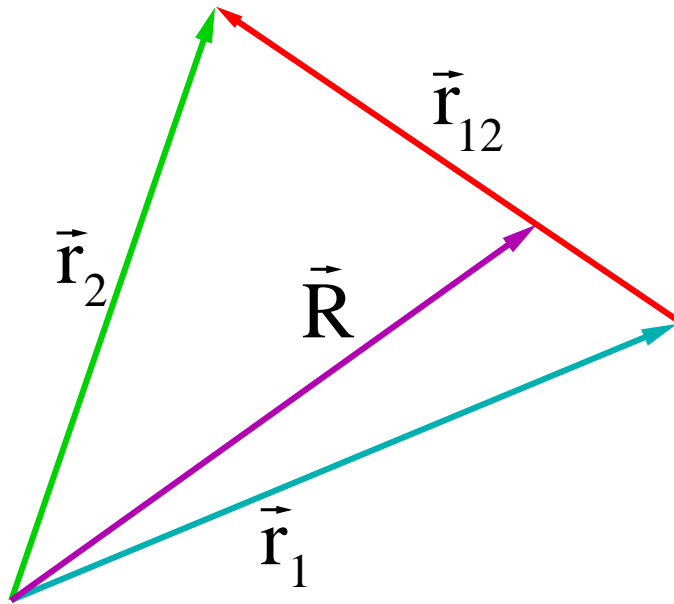


Figura 1.1: Cambio de coordenadas para el problema de dos cuerpos. Coordenadas originales, \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 , nuevas coordenadas, \mathbf{R} y \mathbf{r}_{12}

Adicionalmente, si dividimos cada ecuación por la masa que aparece en ella y las restamos obtenemos

$$\ddot{\mathbf{r}}_2 - \ddot{\mathbf{r}}_1 = \frac{\mathbf{F}_{12}}{m_2} - \frac{\mathbf{F}_{21}}{m_1}, \quad (1.7)$$

donde es interesante notar que

$$\mathbf{r}_{12} \equiv \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 \quad (1.8)$$

no es otra cosa que el vector de posición de la partícula 2 con respecto a la 1. Utilizando la tercera ley de Newton en la ecuación 1.8 queda

$$\ddot{\mathbf{r}}_{12} = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1} \right) \mathbf{F}_{12}, \quad (1.9)$$

ó

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{F}_{12}, \quad (1.10)$$

donde

$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (1.11)$$

se denomina la masa reducida del sistema.

En definitiva, hemos demostrado que cambiando variables de $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ a \mathbf{R} y \mathbf{r}_{12} , las ecuaciones diferenciales que describen la dinámica del sistema de dos partículas aisladas de su entorno puede reescribirse en la forma

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} = cte \quad (1.12)$$

$$\mu \ddot{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{F}_{12}, \quad (1.13)$$

La interpretación física del cambio de variables es sumamente interesante, hemos sustituido el problema del estudio de las dos partículas en interacción por otro en que una partícula imaginaria de masa M se mueve en línea recta (con momemtum constante) mientras independientemente, otra partícula, esta vez de masa μ , evoluciona bajo la acción de la fuerza \mathbf{F}_{12} . Una vez que se calculen $\mathbf{R}(t)$ y $\mathbf{r}_{12}(t)$ se puede volver a las variables iniciales.

También es interesante observar que \mathbf{R} se calcula como un promedio pesado de las posiciones por las masas, si $m_1 = m_2$ el extremo de \mathbf{R} se encontrará en el punto medio entre ambas masas, cuando las masas son distintas, el extremo de \mathbf{R} se aproxima a la masa mayor.

Nótese que si $m_1 \ll m_2$ podemos escribir

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_2(1 + \frac{m_1}{m_2})} = \frac{m_1}{(1 + \frac{m_1}{m_2})} \approx m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) \quad (1.14)$$

donde se ve que el error al cambiar μ por m_1 es chico, en problemas como el de la órbita de la tierra alrededor del sol eso es exactamente lo que ocurre, el extremo de \mathbf{R} se encuentra prácticamente en el centro de m_2 y la masa reducida es fundamentalmente igual a m_1 .

En la sección siguiente y las que le siguen consideraremos solo el interés el movimiento de la masa reducida de un sistema de dos partículas.

1.2. Introducción al Momentum Angular

Consideremos una partícula que se mueve bajo la acción de una *fuerza central*, esto es, una fuerza paralela a la línea que une a la partícula con un punto fijo (\mathbf{O}) denominado el *centro de fuerzas* y cuya amplitud solamente depende de la distancia entre la partícula dicho punto.

Por el momento supondremos que el movimiento ocurre en un plano (afirmación que probaremos más adelante). Estas hipótesis sobre la fuerza y el movimiento sugieren utilizar un sistema de coordenadas polares centrado en \mathbf{O} , lo que permite escribir directamente las siguientes expresiones generales para fuerza y la aceleración

$$\mathbf{F} = F(r) \hat{\mathbf{u}}_r \quad (1.15)$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{u}}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\mathbf{u}}_\theta \quad (1.16)$$

Al utilizar la segunda ley de Newton obtenemos las siguientes ecuaciones para r y θ

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = \frac{F(r)}{M} \quad (1.17)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 \quad (1.18)$$

donde evidentemente M representa la masa de la partícula. La ecuación (1.18) permite concluir que (vea el problema (1))

$$Mr^2\dot{\theta} = \ell = \text{constante.} \quad (1.19)$$

Vamos a concentrarnos en la igualdad (1.19). En primer lugar debemos recalcar que la constancia de ℓ **no** implica que la distancia al origen de coordenadas (r) ó la velocidad angular ($\dot{\theta}$) sean constantes. Lo que es constante es el producto de ambas cantidades. Esta observación tiene una implicación geométrica acerca del movimiento de la partícula sobre la cual comentaremos más adelante (véase la sección 1.3). En segundo lugar, observemos que la igualdad (1.19) se puede reescribir en la forma

$$\ell = r(Mr\dot{\theta}) = |\mathbf{r} \times Mr\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_{\theta}| \quad (1.20)$$

esta fórmula no dice mucho, sin embargo, si recordamos que $\hat{\mathbf{u}}_r \times \hat{\mathbf{u}}_r = 0$ podemos añadir un 0 en la fórmula (1.20) para obtener una nueva expresión para ℓ

$$\ell = |\mathbf{r} \times (Mr\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_{\theta} + Mr\dot{\mathbf{u}}_r)| \quad (1.21)$$

ahora bien, en coordenadas polares la velocidad se escribe en la forma: $\mathbf{v} = \dot{r}\hat{\mathbf{u}}_r + r\dot{\theta}\hat{\mathbf{u}}_{\theta}$ y así que al usar que el momentum de una partícula se define como $\mathbf{p} = M\mathbf{v}$, podemos concluir finalmente que el número ℓ puede expresarse de manera bastante natural en términos de dos cantidades físicas (la posición y el momentum) muy bien definidas según:

$$\ell = |\mathbf{r} \times \mathbf{p}| \quad (1.22)$$

En definitiva, y recapitulando hasta este punto, hemos encontrado que:

si el movimiento bajo la acción de una fuerza central es en un plano entonces el módulo del vector

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{p} \quad (1.23)$$

es constante.

El vector \mathbf{L} denominado *Momentum Angular* es una cantidad física de importancia fundamental que aparece inexorablemente ligada a la descripción de la dinámica de objetos no puntuales, cabe comentar que la definición del momentum angular (fórmula (1.23)) es bastante natural y que surge inducida por el hecho de que la fuerza es central.

Nuestro resultado acerca de la constancia de \mathbf{L} depende de introducirla hipótesis simplificadora según la cual el movimiento es en un plano. Cabe preguntarse acerca de la validez de esta hipótesis. A continuación utilizaremos la definición de \mathbf{L} para **demostrar** rigurosamente que el movimiento de una partícula bajo la acción de una fuerza central ocurre efectiva y necesariamente en un plano.

Para lograr la demostración comenzaremos por probar que bajo la hipótesis de fuerzas centrales el Momentum Angular es constante. En efecto, usando la definición la derivada temporal del momentum angular se calcula fácilmente

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} = 0 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}, \quad (1.24)$$

la fuerza es central si y solo si $\mathbf{F} \parallel \mathbf{r}$ en cuyo caso, el segundo sumando de la igualdad (1.24) se anula y eso demuestra que \mathbf{L} es un vector constante.

Para concluir la demostración observemos que, por definición, \mathbf{L} es ortogonal al plano formado por el radio vector de posición de la partícula (\mathbf{r}) y a su ímpetu, como \mathbf{L} es constante, dicho plano tiene que ser fijo.

1.3. Ley de las Areas

Habíamos adelantado que la constancia de ℓ tenía una implicación geométrica sumamente interesante, y este es un buen momento para discutir este punto. Consideremos el triángulo infinitesimal formado por el origen de coordenadas y dos puntos del movimiento separados por un intervalo de tiempo infinitesimal (dt), el área de dicho triángulo está dada por (**¿por qué?**)

$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{r}(t + dt) \times \mathbf{r}(t)| \quad (1.25)$$

pero:

$$\mathbf{r}(t + dt) = \mathbf{v}(t) dt + \mathbf{r}(t) \quad (1.26)$$

así que al sustituir resulta:

$$dA = \frac{1}{2} |\mathbf{v}(t) \times \mathbf{r}(t) dt| = \frac{1}{2} \frac{M}{M} |\mathbf{v}(t) \times \mathbf{r}(t) dt| = \frac{1}{2M} |\mathbf{p}(t) \times \mathbf{r}(t) dt| = \frac{1}{2M} |\mathbf{L}(t) dt| \quad (1.27)$$

esto es

$$dA = \frac{1}{2M} \ell dt \quad (1.28)$$

donde hemos utilizado que, como el movimiento es bajo la acción de una fuerza central $|\mathbf{L}| = \ell = \text{cte}$. En definitiva

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\ell}{2M} \quad (1.29)$$

el significado físico de esta fórmula es tremendamente interesante. Como el movimiento es en un plano, el radio vector de posición de la partícula va barriendo un área, la cantidad

$$\frac{dA}{dt} \quad (1.30)$$

no es más que la rapidez con la cual se barre dicha área. Así que la fórmula (1.29) establece que en vista de que ℓ es constante, esta rata es fija (y proporcional a ℓ). No es posible sobreenfatizar el hecho de que las manipulaciones matemáticas que nos trajeron hasta la igualdad (1.29) garantizan que esta es válida para cualquier fuerza central sin importar la forma explícita de la función $F(r)$.

La constancia de dA/dt conocida como *Ley de las Areas*, fué descubierta por Johannes Kepler (1571-1630), quien la estableció para las órbitas planetarias basándose en las mediciones astronómicas de Tycho Brahe (1546 – 1601).

1.4. Leyes de Kepler

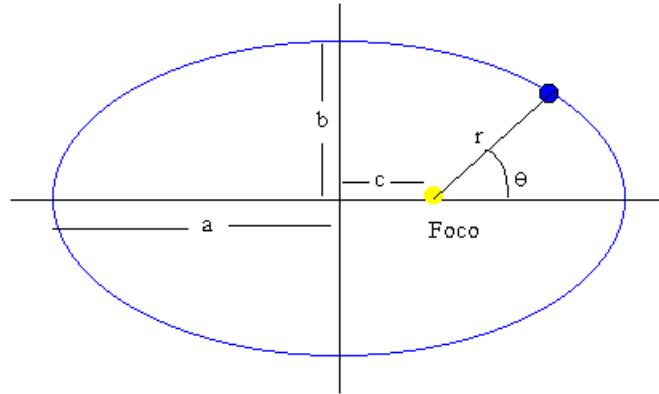


Figura 1.2: Primera ley de Kepler. Los planetas siguen órbitas elípticas en torno al sol

Las mediciones de astronómicas de Brahe le permitieron a Kepler enunciar las siguientes tres leyes para los movimientos planetarios

1. *Los planetas se mueven a lo largo de órbitas elípticas en uno de cuyos focos se encuentra el Sol.*
2. *Los radios que unen al sol con los planetas barren áreas iguales en tiempos iguales*
3. *Los cubos de las distancias al sol y los cuadrados de los períodos son proporcionales.*

Hay varios comentarios interesantes que se pueden hacer en relación a las leyes de Kepler. El primero consiste en destacar que los resultados de Kepler fueron totalmente empíricos, es decir obtenidos directamente a partir de las observaciones y sin ninguna referencia a alguna relación causa efecto ya que no fué sino hasta los trabajos de Newton que tales relaciones pudieron establecerse. El segundo comentario de interés es el siguiente: a la luz de las leyes de Newton y según hemos visto, resulta evidente que la ley de las áreas es un fenómeno asociado a cualquier

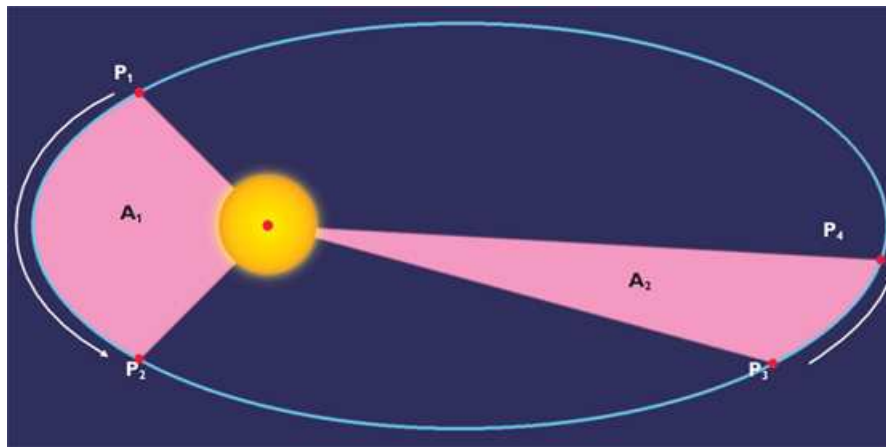


Figura 1.3: Ley de Áreas o segunda ley de Kepler. Los puntos P_1 y P_2 están separados entre sí tanto tiempo como los puntos P_3 y P_4 , la ley de áreas establece que $A_1 = A_2$

fuerza que tenga carácter central. Finalmente debemos destacar que la primera y tercera leyes están directamente relacionadas con la ley de gravitación universal.

Describiendo las cosas en términos modernos, Newton propuso que entre cualquier par de partículas puntuales se establece una fuerza central dada por:

$$\mathbf{F} \propto G \frac{MM_0}{r^2} \hat{\mathbf{u}}_r \quad (1.31)$$

donde, M y M_0 son las masas de las partículas y $\hat{\mathbf{u}}_r$ el vector unitario que define la radial entre ambas partículas. El éxito de esta teoría de gravitación proviene del hecho de que las leyes de Kepler pueden derivarse directamente a partir de la fórmula de la fuerza (1.31) y de las leyes del movimiento de Newton. La ley del movimiento elíptico requiere la integración de una ecuación diferencial (véase la sección (1.8)).

1.4.1. Descubriendo la Ley de Gravitación Universal

Es interesante tratar de imaginar el proceso de descubrimiento de una Ley Física¹. Supongamos que tenemos a nuestra disposición las tres leyes de Kepler, las tres leyes de movimiento de Newton, la notación matemática que usamos hoy día y veamos que podemos descubrir al pensar en lo que ocurre cuando meditamos acerca del movimiento planetario como es descrito por las leyes de Kepler.

En primer lugar, y a la luz de lo que hemos aprendido en la sección (1.3) la ley de las áreas nos hace pensar en que la fuerza que el sol ejerce sobre el planeta es central y que el centro de fuerza está localizado en el sol de manera que la ecuación radial de mov. será

$$m \left(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2 \right) = F(r). \quad (1.32)$$

En segundo lugar, el hecho de que la órbita del planeta sea una elipse con el Sol en un foco nos permite relacionar la distancia radial entre el Sol y el planeta y el ángulo polar a través de la ecuación cónica ($0 \leq \varepsilon < 1$)²:

$$r = \frac{\alpha}{1 + \varepsilon \cos \theta}, \quad (1.33)$$

igualdad en que debe entenderse que la dependencia temporal de r está codificada en la dependencia temporal del ángulo polar.

¹aprendí esta forma de presentar el problema del Dr. Rodrigo Medina (IVIC, USB)

²La *excentricidad* (ε) caracteriza el tipo de cónica como sigue:

- $\varepsilon > 1$ hipérbola.
- $\varepsilon = 1$ parábola.
- $0 < \varepsilon < 1$ elipse
- $\varepsilon = 0$ círculo.

El parámetro α que aparece en la ecuación de la sección cónica es el producto de la distancia entre el centro de la cónica y la excentricidad

Al calcular la velocidad radial (\dot{r}) se obtiene

$$\dot{r} = -\frac{\alpha}{(1 + \varepsilon \cos \theta)^2} (-\varepsilon \sin \theta \dot{\theta}) = \frac{\varepsilon \ell}{m \alpha} \sin \theta, \quad (1.34)$$

donde hemos usado que como la fuerza es central

$$\ell = m r^2 \dot{\theta} = \text{cte.} \quad (1.35)$$

Diferenciando \dot{r} con respecto al tiempo se obtiene la aceleración radial (\ddot{r})

$$\ddot{r} = \frac{\varepsilon \ell}{m \alpha} \cos \theta \dot{\theta} = \frac{\varepsilon \ell^2}{m^2 \alpha} \frac{\cos \theta}{r^2} \quad (1.36)$$

que al ser sustituida en el lado izquierdo de la ecuación de movimiento, lleva al resultado

$$\begin{aligned} m (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) &= m \left(\frac{\varepsilon \ell^2}{m^2 \alpha} \frac{\cos \theta}{r^2} - \frac{\ell^2}{m r^3} \right) = \\ &= \frac{\ell^2}{m \alpha r^2} \left(\varepsilon \cos \theta - \frac{\alpha}{r} \right) = \\ &= \frac{\ell^2}{m \alpha r^2} [\varepsilon \cos \theta - (1 - \varepsilon \cos \theta)] = \\ &= -\frac{\ell^2}{m \alpha r^2} \end{aligned} \quad (1.37)$$

comparando con el lado derecho de la ecuación radial se obtiene en definitiva

$$F = -\frac{\kappa}{r^2} \quad \text{con:} \quad \kappa = \frac{1}{\alpha} \frac{\ell^2}{m} \quad (1.38)$$

de manera que el uso juicioso de las observaciones experimentales (leyes de Kepler) y de la mecánica Newtoniana nos ha permitido mostrar que la ley de las áreas y la primera ley de Kepler implican que la fuerza entre el Sol y el planeta es central, atractiva y de magnitud recíproca con el cuadrado de la distancia. Un razonamiento similar a este pero con una notación enteramente distinta puede haber sido el que le permitió a I. Newton descubrir su ley de Gravitación Universal.

En la sección (1.8) demostraremos el recíproco de este resultado, es decir, probaremos que el uso de las leyes de movimiento de Newton en conjunción con una fuerza que va como $1/r^2$ implica que las trayectorias deben ser cónicas.

1.4.2. La ley de “cubos y cuadrados”

La ley de los períodos puede ser mostrada a través de un argumento sencillo que exhibe claramente el alcance del teorema de conservación del momentum angular. El argumento parte de inquirir acerca de las condiciones que permitan la existencia de una órbita planetaria circular asociada a la fuerza de gravitación universal, en cuyo caso y debido a que $\ell = \text{constante}$ resulta claro que la velocidad angular $\dot{\theta} \equiv \omega$ tiene que ser uniforme, de esta forma, la ecuación radial (1.17) se puede reescribir en la forma (¿por qué?)

$$R\omega^2 = G\frac{M_o}{R^2}, \quad (1.39)$$

donde R es el radio orbital y M_o es la masa del sol, que estamos suponiendo fijo en el centro de fuerzas; de esta ecuación sigue

$$R^3\omega^2 = GM_o. \quad (1.40)$$

Recordando que la frecuencia angular y el período están relacionados por

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (1.41)$$

se obtiene inmediatamente

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{GM_o}{4\pi^2} = \text{constante} \quad (1.42)$$

que no es otra cosa que la tercera ley de Kepler, que en el contexto de esta presentación, se convierte en la condición que permite la existencia de una órbita circular de radio R .

Nombre	Semieje Mayor (UA)	Período Orbital (años)	R^3/T^2
Mercurio	0.3871	0.2408	1.0004
Venus	0.7233	0.6152	0.9982
Tierra	1.000	1	
Marte	1.5273	1.8809	1.0070
Jupiter	5.2028	11.8662	1.0002
Saturno	9.5388	29.458	1.0002
Urano	19.1914	84.0100	1.0015

Cuadro 1.1: Ley de cubos y cuadrados para algunos miembros del sistema solar

La prueba del caso general (órbitas elípticas) es más engorrosa y no la presentaremos en este curso, baste decir que en tal caso la tercera ley se escribe como

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM_o}{4\pi^2} = \text{constante}, \quad (1.43)$$

donde a es el semieje mayor de la órbita (la mayor distancia entre el planeta y el sol).

Ejemplo 1 Sabiendo que el radio orbital medio de Marte es aproximadamente 1,52 veces el radio orbital terrestre, ¿Cuál será el período orbital marciano?

Para realizar el cálculo expresamos a la la tercera ley de Kepler como

$$\frac{R^3}{T^2} = \text{ctte} \quad (1.44)$$

donde R es el radio medio (en verdad el semieje mayor de la órbita).

De acuerdo con esto:

$$\frac{R_M^3}{T_M^2} = \frac{R_T^3}{T_T^2} \quad (1.45)$$

donde R_T es el radio orbital medio terrestre y el resto de la notación es obvia. Un despeje trivial nos deja con

$$T_M = \sqrt{\frac{R_M^3}{R_T^3}} T_T = \sqrt{(1,52)^3} T_T \approx 1,87 \text{ años} \quad (1.46)$$

1.5. Consideraciones energéticas: El Potencial Efectivo

Comenzaremos esta sección demostrando que toda fuerza central es conservativa. Para tal fin recordemos que el trabajo realizado por una fuerza para llevar a una partícula entre los puntos A y B de una trayectoria \mathcal{C} se calcula como sigue

$$W = \int_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (1.47)$$

Ahora bien, el diferencial de trayectoria más general posible en tres dimensiones está dado por

$$d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{u}}_r + d\mathbf{r}_\perp, \quad (1.48)$$

donde $dr \hat{\mathbf{u}}_r$ es un elemento infinitesimal de trayectoria a lo largo de la dirección radial que une la partícula con el origen de coordenadas, y $d\mathbf{r}_\perp$ un movimiento infinitesimal en una dirección arbitraria contenida en el plano ortogonal a $\hat{\mathbf{u}}_r$.

Recordando que estamos estudiando fuerzas centrales y utilizando un origen de coordenadas que corresponda con el centro de fuerza, la fuerza queda descrita por la fórmula (1.15) y por lo tanto

$$\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = F(r) dr. \quad (1.49)$$

De acuerdo a este resultado, los puntos A y B de la trayectoria \mathcal{C} quedan identificados por sus respectivas distancias al origen de coordenadas (r_A , y r_B) de manera que el cálculo del trabajo queda reducido al cálculo de la siguiente integral ordinaria

$$W = \int_{r_A}^{r_B} F(r) dr, \quad (1.50)$$

en donde todo rastro de la trayectoria ha desaparecido. En consecuencia, hemos demostrado que efectivamente la fuerza es conservativa. En consecuencia, existe una energía potencial asociada a la fuerza central dada por la integral

$$U(P) = - \int_{arb}^P \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.51)$$

donde P es el punto en que queremos calcular la energía potencial, y arb es un punto arbitrario. Debido a la estructura de la fuerza central, el potencial solo puede depender de la distancia al origen, razón por la cual, en lo sucesivo, describiremos al potencial central por la fórmula

$$U(r) = - \int_{r_0}^r F(s) ds, \quad (1.52)$$

donde ahora r_0 es un radio arbitrario. Por cierto que esta última fórmula nos permite escribir a la fuerza en la forma

$$\mathbf{F}(r) = - \frac{dU}{dr} \hat{\mathbf{u}}_r. \quad (1.53)$$

Con la ayuda del potencial la energía mecánica total de la partícula que se mueve bajo la acción de una fuerza central se escribe en la forma

$$E = \frac{M}{2} \left(\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \right) + U(r) \quad (1.54)$$

la conservación del momentum angular nos permite expresar la velocidad angular en términos del radio

$$\dot{\theta} = \frac{\ell}{Mr^2} \quad (1.55)$$

lo que en definitiva lleva a la siguiente expresión para la energía

$$E = \frac{M}{2} \dot{r}^2 + \frac{\ell^2}{2Mr^2} + U(r) \quad (1.56)$$

podemos obtener una forma bien interesante de esta expresión si definimos el *potencial efectivo* por la igualdad

$$U_{eff} \equiv \frac{\ell^2}{2Mr^2} + U(r), \quad (1.57)$$

en efecto, en términos del potencial efectivo la fórmula para la energía se reduce a la siguiente expresión

$$E = \frac{M\dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r) \quad (1.58)$$

que es *formalmente idéntica* a la fórmula para la energía de una partícula que se mueve a lo largo del eje x ($E = \frac{m\dot{x}^2}{2} + U(x)$). Esto nos va a permitir estudiar algunos aspectos muy generales del movimiento bajo la acción de fuerzas centrales.

A partir de la fórmula (1.58) podemos encontrar la siguiente expresión general para la rapidez radial de la partícula

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{M}(E - U_{eff}(r))} \quad (1.59)$$

de acá podemos calcular directamente los *puntos de retorno* del movimiento, es decir los valores de r para los cuales se anula la rapidez radial.

Ejemplo 2 *Concentrémonos en el movimiento bajo la acción de la gravedad, en este caso*

$$F(r) = -G \frac{MM_0}{r^2} \quad (1.60)$$

de donde (escogiendo $r_0 = \infty$) se obtiene el potencial gravitacional

$$U(r) = -G \frac{MM_0}{r} \quad (1.61)$$

lo que nos lleva a la siguiente expresión para el potencial efectivo

$$U_{eff}(r) = \frac{\ell^2}{2Mr^2} - G \frac{MM_0}{r}, \quad (1.62)$$

el primer aspecto obvio de este potencial efectivo es el hecho de que tiene dos sumandos de signo diferente, el segundo consiste en que el potencial se anula a grandes distancias del origen región en la cual domina el potencial gravitacional de manera que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} U_{eff} = 0^- \quad (1.63)$$

cerca del origen el potencial efectivo es totalmente dominado por el término centrífugo y ocurre que

$$\lim_{r \rightarrow 0} U_{eff} = \infty \quad (1.64)$$

el potencial efectivo tiene una sola raíz y un solo mínimo global (para el cual el valor de U_{eff} es negativo). Estas características nos permiten decir algunas cosas del movimiento si se conoce la energía mecánica total de la partícula. Estudiaremos los tres casos posibles, a saber: $E > 0$, $E = 0$ y $E < 0$

- Comencemos considerando el caso en que $E < 0$ en este caso (y asumiendo por supuesto que $0 > E > \text{Min}(U_{eff})$), la ecuación

$$E - U_{eff} = E - \frac{\ell^2}{2Mr^2} + G\frac{MM_0}{r} = 0 \quad (1.65)$$

tiene dos raíces lo que implica la existencia de dos puntos de retorno, y en consecuencia durante todo el movimiento, la distancia entre la partícula y el origen deberá mantenerse entre estos dos valores, es decir

$$r_{min} \leq r(t) \leq r_{max} \quad (1.66)$$

de manera que la órbita es acotada.

- En el caso en que la energía total sea positiva $E > 0$ solo hay un punto de retorno y además la partícula puede escapar al infinito ya que a grandes distancias $E \approx \frac{v^2}{2} > 0$

- *El caso de energía nula $E = 0$ justamente separa las órbitas acotadas de las no acotadas, en efecto, si $E = 0$ la partícula apenas puede alcanzar el infinito con velocidad nula.*

En general los potenciales centrales atractivos son negativos y se anulan a distancia infinita del centro, razones por las cuales algunos de los aspectos que acabamos de discutir mantienen su validez. Así por ejemplo, las órbitas acotadas están asociadas a movimientos con energía mecánica total negativa.

Hay sin embargo un comentario sobre el que debemos hacer especial énfasis. El hecho de que una órbita sea acotada no significa que sea periódica (es decir que el movimiento se repita exactamente luego de un intervalo finito de tiempo). Las preciosas órbitas elípticas del movimiento kepleriano son más bien excepcionales y bajo ningún concepto representan la geometría de las órbitas bajo potenciales generales, de hecho el movimiento Kepleriano es casi milagroso y está inexorablemente ligado al hecho de que la fuerza gravitacional sea inversa al cuadrado de la distancia entre las masas.

1.6. Ejemplos

Ejemplo 3 *Una estación espacial de masa M viaja en el sistema solar orbitando alrededor del sol³. En un cierto instante la posición y velocidad de la estación espacial están dadas por los vectores*

$$\mathbf{r}_0 = \pi^2 \hat{\mathbf{j}} \text{ UA}, \quad \mathbf{v}_0 = \left(-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}} \right) \text{ UA/año} \quad (1.67)$$

con respecto a un sistema de referencia cartesiano con origen en el Sol. Despreciando totalmente la interacción gravitacional entre la estación espacial y cualquier miembro del sistema solar distinto del Sol mismo,

³Ayudas: Una Unidad Astronómica (UA) es una distancia igual al semieje mayor de la órbita terrestre. $GM_0 = 4\pi^2 (UA)^3 \text{ año}$, M_0 =masa solar.

1. Encuentre la energía total de la estación espacial, de acuerdo a su resultado diga como es la órbita ¿elíptica, parabólica, hiperbólica?
2. Calcule el momentum angular (\mathbf{L}_S) de la estación espacial y describa (más bien, caracterize) su plano orbital.
3. ¿Cuál es la velocidad radial de la estación en los puntos de mínima (perihelio) y máxima (afelio) distancia entre esta y el Sol?
4. Determine el afelio y el perihelio de la estación.
5. ¿Qué tiempo requiere la estación para completar una órbita alrededor del sol?

Para calcular la energía de la estación espacial basta con sustituir los datos en $E = T + U$, resultando:

$$E = \frac{3M}{2} - \frac{GM M_0}{\pi^2} = \frac{3M}{2} - 4M = -\frac{5M}{2} < 0, \quad (1.68)$$

como la energía total es negativa, la órbita es acotada, y como el movimiento es Kepleriano tiene que ser elíptica .

El momentum angular con respecto al centro de fuerza es $\mathbf{L}_S = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$, utilizando los valores iniciales y recordando que \mathbf{L} es constante porque la fuerza es central obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}_s &= M \mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 = \pi^2 \hat{\mathbf{j}} \times (-\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} + \hat{\mathbf{k}}) = M \pi^2 (-\hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}}) \\ &= M \pi^2 (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{k}}), \end{aligned} \quad (1.69)$$

el plano orbital es el plano perpendicular a \mathbf{L} que pasa por el origen, es decir, el plano

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{x} = 0, \quad (1.70)$$

donde \mathbf{x} es el vector de posición de un vector arbitrario contenido en el plano.

El afelio y el perihelio son los puntos de retorno orbitales y por lo tanto la velocidad radial (\dot{r}) en tales puntos es nula. El afelio y el perihelio son los puntos de retorno que corresponden a las posiciones de máximo alejamiento y acercamiento entre la estación espacial y el sol, con el fin de calcularlos comencemos por escribir la ecuación efectiva para el movimiento radial:

$$E = \frac{M \dot{r}^2}{2} + U_{eff}(r). \quad (1.71)$$

Utilizando que en los puntos de retorno $\dot{r} = 0$ resulta (al sustituir los valores que hemos obtenido anteriormente)

$$-\frac{5M}{2} = \frac{2M^2\pi^4}{2Mr^2} - \frac{4\pi^2 M}{r}, \quad (1.72)$$

ó

$$-\frac{5}{2} = \frac{\pi^4}{r^2} - \frac{4\pi^2}{r}, \quad (1.73)$$

de donde obtenemos la siguiente ecuación de segundo grado

$$\frac{5}{2}r^2 - 4\pi^2 r + \pi^4 = 0, \quad (1.74)$$

con raíces:

$$\text{afelio} \approx (1 + 0,61) 0,8 \pi^2 = 1,28 \pi^2 \text{ UA} \quad (1.75)$$

$$\text{perihelio} \approx (1 - 0,61) 0,8 \pi^2 = 0,32 \pi^2 \text{ UA} \quad (1.76)$$

Para calcular (aproximadamente) el período orbital de la estación espacial observemos que su radio orbital medio es $\langle a \rangle = 0,8 \text{ UA}$, y supongamos que la estación realiza una órbita circular de radio $\langle a \rangle$ de manera que,

$$m \langle a \rangle \dot{\theta}^2 = \frac{G m M_0}{\langle a \rangle^2}, \quad (1.77)$$

al suponer que la órbita es circular la velocidad angular debe ser uniforme e igual a $2\pi/T$ de donde sigue que

$$T = \sqrt{\frac{4\pi^2}{G M_0} \langle a \rangle^3} = 0,8^{3/2} \text{ años} \approx 0,71 \text{ años} \quad (1.78)$$

Ejemplo 4 Una partícula de masa m se mueve bajo la acción de una fuerza central cuyo potencial es

$$U = \frac{\kappa}{r^2},$$

donde κ es una constante positiva y r la distancia al centro de fuerza.

1. Determine la fuerza.
2. ¿Qué puede decir de la trayectoria de la partícula?
3. La posición y velocidad iniciales de la partícula de prueba son

$$\vec{r}_0 = x_0 \hat{\mathbf{i}} + z_0 \hat{\mathbf{k}}, \quad \vec{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{i}},$$

Determine la mínima distancia a la que la partícula puede acercarse al centro de fuerza

La fuerza asociada al potencial se calcula sencillamente recordando que la fuerza es opuesta al gradiente del potencial, es decir,

$$\vec{F} = -\nabla U = -\frac{dU}{dr} \hat{\mathbf{u}}_r = \frac{2\kappa}{r^3} \hat{\mathbf{u}}_r, \quad (1.79)$$

como κ es una constante positiva, la fuerza está siempre dirigida de tal suerte que acelera a las partículas del centro de fuerzas (es decir, es una fuerza repulsiva).

La fuerza es central, y por lo tanto la trayectoria de la partícula de prueba tiene que estar contenida en un plano, adicionalmente el movimiento no puede ser acotado (la partícula tiene que escapar al infinito).

La posición y velocidad iniciales nos permiten calcular el momentum angular y la energía total de la partícula sin ninguna dificultad,

$$\mathbf{L} = m \left(x_0 \hat{\mathbf{i}} + z_0 \hat{\mathbf{k}} \right) \times \mathbf{v}_0 = v_0 \hat{\mathbf{i}} = m x_0 v_0 \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = m z_0 v_0 \hat{\mathbf{j}} \quad (1.80)$$

$$E = \frac{m v_0^2}{2} + \frac{\kappa}{x_0^2 + z_0^2} = \frac{m v_0^2 (x_0^2 + z_0^2) + 2\kappa}{2(x_0^2 + z_0^2)} > 0. \quad (1.81)$$

La energía escrita en términos de la velocidad radial y el potencial efectivo es

$$E = \frac{m \dot{r}^2}{2} + \frac{\ell^2}{2m r^2} + \frac{\kappa}{r^2} \quad (1.82)$$

sustituyendo los resultados (1.80) y (1.81), e igualando $\dot{r} = 0$ para calcular la posición radial del punto de retorno se obtiene la siguiente ecuación para r_{min} :

$$\frac{m v_0^2 (x_0^2 + z_0^2) + 2\kappa}{2(x_0^2 + z_0^2)} = \frac{m z_0^2 v_0^2}{2 r_{min}^2} + \frac{\kappa}{r_{min}^2} \quad (1.83)$$

ó equivalentemente

$$\frac{m v_0^2 (x_0^2 + z_0^2) + 2\kappa}{2(x_0^2 + z_0^2)} = \frac{m z_0^2 v_0^2 + 2\kappa}{2 r_{min}^2} \quad (1.84)$$

de donde sigue:

$$r_{min} = \sqrt{\frac{m(x_0^2 + z_0^2)v_0^2 + 2\kappa}{m v_0^2 z_0^2 + 2\kappa}} \sqrt{x_0^2 + z_0^2}. \quad (1.85)$$

Nótese que si la velocidad inicial fuera nula, la distancia de mínimo acercamiento sería

$$r_{min} = \sqrt{x_0^2 + z_0^2}. \quad (1.86)$$

que no es otra cosa que la distancia inicial al centro de fuerza.

1.7. Complemento: Ecuación de la órbita

Las ecuaciones de Newton (ecuaciones de movimiento) para el movimiento bajo la acción de una fuerza central son

$$M(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F(r) \quad (1.87)$$

$$M(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = 0 \quad (1.88)$$

Sabemos que estas son ecuaciones diferenciales que una vez integradas nos permiten conocer la posición de la partícula en función del tiempo, es decir, las funciones $r(t)$ y $\theta(t)$. Sin embargo, hemos visto que aún sin resolver estas ecuaciones podemos entender algunos aspectos generales del movimiento (conservación del momentum angular, condiciones para que los movimientos sean acotados, etc.). Cabe preguntarse si podremos decir algo más. Esta sección está dedicada a mostrar que efectivamente este es el caso, para ello demostraremos que es posible utilizar las ecuaciones de movimiento para encontrar una ecuación diferencial para la trayectoria trayectoria que no requiere la integración (en tiempo) de las ecuaciones de Newton.

Comencemos por observar que si lográramos encontrar las dependencias temporales $r(t)$ y $\theta(t)$ podríamos intentar despejar el tiempo para expresar (por ejemplo) al radio como función del ángulo ($r(\theta)$)⁴. De acuerdo a esto, si quisiéramos calcular la rapidez radial podríamos utilizar la regla de la cadena para obtener

$$\frac{dr}{dt} = \frac{ds}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} \quad (1.89)$$

de esta manera, la derivación temporal se puede expresar como sigue

$$\frac{d}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \frac{d}{d\theta} \quad (1.90)$$

Ahora bien, ya hemos aprendido que la segunda ecuación de movimiento implica la igualdad

$$Mr^2\dot{\theta} = \ell (= \text{constante}) \quad (1.91)$$

de manera que la derivación con respecto al tiempo puede sustituirse por⁵

$$\frac{d}{dt} = \frac{\ell}{Mr^2} \frac{d}{d\theta} \quad (1.92)$$

⁴exactamente como se hace con el movimiento de proyectiles para demostrar que la trayectoria es parabólica

⁵esto no es tan raro como parece, ya lo hicimos en la sección (1.4.1)

en el entendimiento de que $r = r(\theta)$. Si iteramos la diferenciación temporal obtendremos

$$\frac{d^2}{dt^2} = \frac{\ell}{Mr^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{\ell}{Mr^2} \frac{d}{d\theta} \right) = \frac{\ell^2}{M^2 r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{d}{d\theta} \right), \quad (1.93)$$

de manera, que la segunda derivada del radio con respecto al tiempo es

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{\ell^2}{M^2 r^2} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta} \right) = \frac{\ell^2}{M^2 r^2} \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \quad (1.94)$$

nuestro objetivo es utilizar este resultado para eliminar el tiempo de la ecuación:

$$M \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \right) = F(r) \quad (1.95)$$

veremos que esto es posible y que la ecuación resultante es fácilmente resoluble. En efecto, al sustituir (1.94) y la fórmula para la velocidad angular en (1.95) resulta

$$-\frac{\ell^2}{Mr^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - rM \left(\frac{\ell}{Mr^2} \right)^2 = F(r), \quad (1.96)$$

ó

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = -\frac{Mr^2}{\ell^2} F(r), \quad (1.97)$$

resultado que se denomina “ecuación de la órbita”. Es menester que hagamos hincapié en que la resolución de esta ecuación nos lleva a encontrar $r = r(\theta)$, es decir, la trayectoria u órbita.

1.8. Complemento: El Problema de Kepler

El problema de Kepler consiste en calcular la órbita que corresponde a la fuerza de gravitación Newtoniana. En este caso, al sustituir $F(r) = -\frac{\kappa}{r^2}$ en la ecuación de la órbita se obtiene

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} = \alpha^{-1}, \quad (1.98)$$

donde

$$\alpha \equiv \frac{\ell^2}{M\kappa} \quad (1.99)$$

Si ahora efectuamos el cambio de variables

$$u \equiv \frac{1}{r} \quad (1.100)$$

obtenemos la siguiente ecuación diferencial

$$u'' + u = \alpha^{-1} \quad (1.101)$$

La ecuación (1.101) cumple con nuestro objetivo inicial: buscar una descripción de la trayectoria, en efecto, si resolvemos (1.101) obtendremos $r = r(\theta)$, la ecuación diferencial que hemos obtenido es reminiscente de la ecuación del oscilador armónico ($\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$) y se diferencia de esta por el término constante no-homogéneo, en este punto es necesario mencionar (sin demostración) el siguiente teorema

Teorema 1 *La solución general de la ecuación diferencial nohomogénea*

$$\ddot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = f(t) \quad (1.102)$$

es

$$x_{\text{gral}}(t) = x_H(t) + x_p(t), \quad (1.103)$$

donde $x_H(t)$ es la solución general del problema homogéneo mientras que $x_p(t)$ es una solución del problema nohomogéneo.

Es claro que la función constante $u_p(t) = \alpha^{-1}$ es una solución de la ecuación (1.101), de manera que la solución general está dada por

$$u(t) = U_0 \cos(\theta - \theta_0) + \alpha^{-1} \quad (1.104)$$

donde $U_0 > 0$ y θ_0 son constantes, podemos introducir una nueva constante $\varepsilon (= \alpha^{-1} U_0)$ para reescribir la ecuación de la trayectoria en la forma

$$\frac{\alpha}{r} = \{1 + \varepsilon \cos(\theta - \theta_0)\} \quad (1.105)$$

escogiendo $\theta = 0$ de manera tal que el punto de máximo acercamiento al centro de fuerzas corresponda con $r(0)$ se obtiene el resultado final:

$$\frac{\alpha}{r} = \{1 + \varepsilon \cos \theta\} \quad (1.106)$$

que como ya sabemos, es la ecuación general de una cónica.

No es difícil convencerse (**ejercicio**) de que la excentricidad (ε), la energía total de la órbita están y el momentum angular están relacionadas por

$$\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{2 E \ell^2}{M \kappa^2}} \quad (1.107)$$

de donde resulta evidente que, para las órbitas acotadas ($E < 0$) la excentricidad es de magnitud menor a uno ($\varepsilon < 1$) condición que asegura que la órbita es elíptica.

En términos del signo de la energía el resultado es el siguiente:

- $E < 0$ órbita elíptica (acotada)
- $E > 0$ órbita hiperbólica (no acotada)
- $E = 0$ órbita parabólica (no acotada)

1.9. Problemas propuestos

Problema 1 Demuestre la fórmula (1.19). **Ayuda:** observe que el lado izquierdo recuerda vagamente a la derivada de un producto, multiplique la ecuación (1.18) por $M r$ -el factor M está allí por conveniencia posterior- y observe lo que ocurre)

Problema 2 ¿A qué altura sobre la superficie terrestre deberá colocarse un satélite cuya órbita es circular para que esta sea geoestacionaria?

Problema 3 El período de Plutón es de unos 248,5 años, estime el radio medio de su órbita.

Problema 4 ¿Qué puede decir de los ángulos que forman la velocidad y la aceleración de un planeta en su afelio y su perihelio?

Problema 5 Considere el potencial $U(r) = \frac{\kappa e^{-r/r_0}}{r}$ donde κ es una constante real, r la distancia al centro de fuerza y r_0 una constante positiva.

- ¿Cuales son las dimensiones de κ y r_0 ?
- Encuentre la fuerza asociada a U .
- ¿Qué puede decir de la fuerza en función del signo de κ

Problema 6 Este problema nos lleva a una forma integral de la ecuación de la órbita. La regla de la cadena nos permite escribir:

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{d\theta}{dt} \frac{dt}{dr} = \frac{\dot{\theta}}{\dot{r}} \quad (1.108)$$

Utilice esta igualdad, la identidad $\ell = m r^2 \dot{\theta}$ y la fórmula general para la energía para despejar $\dot{\theta}$ en términos de r , e integre para obtener:

$$\theta(r) = \pm \int \frac{\ell/r^2 dr}{\sqrt{2M(E - U_{eff})}} \quad (1.109)$$

Para estudiar el problema de Kepler sustituya

$$U_{eff} = \frac{\ell^2}{2M r^2} - \frac{G M M_0}{r} \quad (1.110)$$

y utilice el cambio de variables $u = \ell/r$ calcule la integral (esto puede ser largo y tedioso) y encuentre una fórmula para $\theta(r)$, escoja la constante de integración de forma que el mínimo r coincida con $\theta = 0$, despeje y obtenga $r(\theta)$, verifique que el resultado coincide con la fórmula para una órbita cónica.

Capítulo 2

Sistemas de Partículas I

Centro de Masa y Teorema del Momentum

2.1. Momentum Lineal

2.1.1. Centro de Masa

Los cursos de física elemental nos han *habituado* a tratar cuerpos de extensión finita como si fueran objetos puntuales. Así por ejemplo, tratamos al sol y la tierra como si fueran dos puntos, a un hombre como si no tuviera extensión y lo mismo hacemos con cajas, poleas, etc., ciertamente tanto nuestra intuición como los resultados de algunos cálculos basados en estas aproximaciones parecen ser bastante razonables, pero vale la pena preguntarse ¿hasta qué punto podrá justificarse la aproximación de partícula puntual?. Esta pregunta está hecha en un sentido matemático, en el entendimiento de que la mecánica pretende dar un modelo matemático de

cierta realidad, en este sentido, debemos entender que el hecho de que nuestras aproximaciones parezcan razonables no significa que tengan algún soporte teorematóico. Siguiendo este orden de ideas dedicaremos las próximas clases a buscar una justificación matemática a la aproximación de partícula puntual.

Con el fin de llevar a cabo este programa debemos introducir el concepto de *sistema*, para ello consideremos un conjunto (\mathcal{M}) de partículas y sus interacciones mútuas, un *sistema* de partículas es un subconjunto arbitrario ($\mathcal{C} \subset \mathcal{M}$) de partículas del conjunto inicial, el complemento de \mathcal{C} recibe la denominación de *ambiente* ó exterior, las interacciones entre las partículas del sistema se denominan *fuerzas internas*, mientras que las interacciones con las partículas del ambiente se denominan: *fuerzas externas*. La sutileza del concepto de sistema está asociada a la arbitrariedad con que se define el sistema, en efecto, la definición de un sistema depende de lo que queramos estudiar. Así por ejemplo, consideremos el conjunto formado por la tierra, la luna, el sol y el resto del sistema solar, es más o menos claro que si queremos estudiar los movimientos de la luna con respecto a la tierra deberíamos tomar como sistema al par tierra-luna, y como ambiente al resto del sistema solar. De esta manera, lo que está detrás del concepto de sistema es la idea mecanicista fundamental de aislar las componentes de un todo para intentar entender el comportamiento del todo como resultado del comportamiento de las partes. Con esta idea en mente vamos a introducir un concepto bastante más preciso

Definición 1 Dado un sistema constituido por un conjunto de partícula puntuales de masas $m_1, m_2, m_3, \dots, m_N$, el **centro de masa** (CM) del sistema es un punto abstracto cuyo vector de posición se calcula por medio de la fórmula

$$\mathbf{R} \equiv \frac{1}{M} \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \quad (2.1)$$

donde:

$$M = \sum_{i=1}^N m_i \quad (2.2)$$

es la masa total del sistema.

Desde el punto de vista matemático es evidente que el vector \mathbf{R} representa un *promedio pesado* de las posiciones ocupadas por todas las partículas que forman al sistema. Hay dos cosas que deberían resultar obvias, en primer lugar que la posición del CM no tiene que coincidir con la posición de alguna de las partículas del sistema y en segundo, que debido a que en el cálculo de esta media el peso está dado por las masas de las partículas el CM tiende a acercarse a aquellas regiones en que se concentre más masa. Así por ejemplo, si dos partículas tienen masas M y $3M$ y están separadas por una distancia ℓ , el CM estará localizado a lo largo del segmento que las separa y a una distancia $\frac{\ell}{4}$ de la partícula más masiva¹.

2.1.2. Densidad de masa

La definición que hemos presentado es útil para el cálculo de la posición del centro de masa de un sistema compuesto por partículas puntuales, pero ¿qué ocurre en el caso más realista de un cuerpo extendido como una esfera maciza?. Ciertamente podemos recurrir a decir que la esfera maciza está compuesta por átomos y que estos son tan chicos que pueden considerarse partículas puntuales, sin embargo la física clásica no funciona así y se recurre a la idea de un cuerpo continuo en el que sin importar lo pequeño de la escala a que se examine, siempre observaremos que su composición es la misma. En tales circunstancias es claro que podemos pensar en elementos de masa infinitesimalmente pequeños y que la posición del centro de masa deberá calcularse por una integral vectorial como sigue:

$$\mathbf{R} \equiv \frac{1}{M} \int_{Vol} \mathbf{r} \, dm, \quad (2.3)$$

¹Verifique esto como ejercicio

donde evidentemente, Vol es el volumen del cuerpo. Ahora bien, ¿cómo se calcula dm ?. Este es un problema bastante interesante al que dedicaremos algunos párrafos.

Material	Densidad (gr/cc)
Alcohol etílico	0.79
Hielo	0.917
Aceite de oliva	0.92
Agua	1.00
Aleaciones de acero	7.6-8.9
Mercurio	13.6
Iridio	22.4

Cuadro 2.1: Con el fin de dar una idea de los órdenes de magnitud, acá tiene una tabla de densidades para algunas sustancias

La forma en que se distribuye la masa de un cuerpo se describe a través de una cantidad denominada *densidad de masa*. Si un cuerpo es uniforme (está constituido de un solo material, se dice que es homogéneo, y su densidad² ρ resulta ser una constante dada por: $\rho = M/V$ donde M es la masa del cuerpo y V su volumen. Cuando el cuerpo no es homogéneo las cosas se complican un poco y es necesario recurrir a la noción de límite para definir la densidad de un elemento muy pequeño del cuerpo como:

$$\rho = \lim_{dV_{gen} \rightarrow 0} \frac{dm}{dV_{gen}}. \quad (2.4)$$

Donde dm es la masa del pequeño elemento de volumen y dV_{gen} es el volumen generalizado infinitesimal del cuerpo (un elemento de longitud si el cuerpo es un filamento infinitamente

²a veces -cuando aparezca alguna confusión posible con el uso que se esté dando a la letra griega ρ , utilizaremos la letra D para designar a la densidad

delgado, un área si el cuerpo es una superficie sin espesor y claro, un volumen tridimensional estándar si el cuerpo es algo menos exótico).

Utilizando la definición de densidad, podemos utilizar nuestros conocimientos básicos de cálculo para imaginar a un cuerpo extendido como una colección infinita de elementos de masa dm y masa total:

$$M = \int_{\text{cuerpo}} dm = \int_{\text{cuerpo}} \rho dV_{gen} \quad (2.5)$$

Si el sistema está constituido por un sistema cuya masa está distribuida continuamente, la fórmula de cálculo de la posición del centro de masa debe cambiarse ligeramente. El cambio viene de observar que cada elemento infinitesimal de volumen (dv) del cuerpo puede considerarse como una masa infinitesimal de magnitud $dm = \rho dv$ de manera que debemos efectuar el cambio $m_i \rightarrow dm$ y consecuentemente la suma debe cambiarse por una integral, es decir, que para un continuo, la posición del centro de masa se calcula por

$$\mathbf{R} \equiv \frac{1}{M} \int_{Vol} \rho \mathbf{r} dV_{gen} \quad (2.6)$$

donde \mathbf{r} es la posición del elemento de volumen. Claro que ahora hemos trasladado la pregunta ¿cómo se calcula dm ? a ¿cómo se calcula o qué es dV_{gen} ?, problema que atacaremos a continuación.

2.1.3. ¿Cómo calcular un diferencial de volumen I? (el caso plano)

El problema del cálculo de un elemento de volumen es esencialmente un problema geométrico que puede ser relativamente complicado a menos que uno esté utilizando un sistema de coordenadas ortogonales como el cartesiano o el sistema de coordenadas polares.

En el primer caso (coordenadas cartesianas) podemos imaginar al plano dividido en pequeños rectángulos de lados dx y dy , por lo tanto el elemento infinitesimal de área correspondiente es

obviamente

$$dA = dx dy, \quad (2.7)$$

otra manera de ver que esta es el área es considerar un par desplazamientos en el plano dados por los vectores $\mathbf{v}_x = dx \hat{i}$ y $\mathbf{v}_y = dy \hat{j}$ y recordar que el área del paralelogramo generado por estos dos vectores es

$$dA = |\mathbf{v}_x \times \mathbf{v}_y| = |dx \hat{i} \times dy \hat{j}| = dx dy \quad (2.8)$$

De acuerdo con esto, en el plano coordenado cartesiano la masa de un elemento infinitesimal de superficie es

$$dm = \sigma dx dy \quad (2.9)$$

donde σ es la notación usual para la densidad de masa por unidad de area.

El segundo caso de interés es el de las coordenadas polares, este sistema hay dos desplazamientos infinitesimales para considerar (piense en el vector de desplazamiento infinitesimal más general posible: $d\mathbf{r} = dr \hat{u}_r + r d\theta \hat{u}_\theta$), los radiales dados por $\mathbf{v}_r = dr \hat{u}_r$, y los desplazamientos tangentes a los círculos coordenados dados por $\mathbf{v}_\theta = r d\theta \hat{u}_\theta$ debido a lo cual, el área del pequeño rectángulo formado por estos desplazamientos infinitesimales es

$$dA = |dr \hat{u}_r \times r d\theta \hat{u}_\theta| = r dr d\theta \quad (2.10)$$

Si le agrada una representación más gráfica del asunto piense que el sistema de coordenadas polares divide al plano en círculos concéntricos y semirectas radiales -asociadas con el ángulo θ -. Las semirectas radiales son ortogonales a los círculos y por lo tanto un elemento infinitesimal de área es un rectángulo de lados $ds_r = dr$ y $ds_\theta = r d\theta$ lo que al calcular el área del pequeño rectángulo formado por estos lados nos lleva al resultado anterior.

2.1.4. Aplicaciones

Ejemplo 5 Encuentre la posición del centro de masa de una lámina cuadrada homogénea de masa M y lado a .

Lo primero que salta a la vista en este ejemplo es que la simetría del objeto, que garantiza que el centro de masa coincide con su centro geométrico, si colocamos un sistema de coordenadas cartesianas en dicho punto resultará

$$\mathbf{r}_{CM} = \mathbf{0}, \quad (2.11)$$

por otra parte, si colocamos el origen de coordenadas de tal manera que los vértices del cuadrado estén en los puntos $(0,0)$, $(a,0)$, $(0,a)$ y (a,a) la posición del centro de masa será

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{a}{2} (\hat{i} + \hat{k}) \quad (2.12)$$

Es instructivo realizar el cálculo explícito con las herramientas que se introdujeron al principio de esta sección; como ya sabemos, la posición del centro de masas del objeto se calcula como

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{CM} &= \frac{1}{M} \int_{\text{objeto}} \{ \hat{i} x \, dm + \hat{j} y \, dm \} = \\ &= \frac{1}{M} \left\{ \hat{i} \int_{\text{objeto}} x \, dm + \hat{j} \int_{\text{objeto}} y \, dm \right\} = \\ &= \frac{1}{M} (\hat{i} \mathcal{I}_1 + \hat{j} \mathcal{I}_2). \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde los pares (x, y) son las coordenadas de cada elemento diferencial de masa.

Llevaremos adelante el cálculo en el segundo sistema de referencia que describimos al principio del ejemplo, de esta manera, las integrales que deben calcularse son:

$$\mathcal{I}_1 = \sigma \int_0^a dx \int_0^a dy \, x \quad y \quad \mathcal{I}_2 = \sigma \int_0^a dx \int_0^a y \, dy \quad (2.14)$$

donde $\sigma = M/a^2$ es la densidad de la lámina (que hemos supuesto homogénea). El cálculo es inmediato y se obtiene:

$$\mathcal{I}_1 = \sigma \frac{a^3}{2} = \mathcal{I}_2 \quad (2.15)$$

sustituyendo el valor de σ y llevando todo a la fórmula (2.13) obtenemos efectivamente

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{a}{2} (\hat{i} + \hat{k}) \quad (2.16)$$

Ejemplo 6 En este ejemplo vamos a calcular la posición del centro de masa de una lámina semicircular de radio R .

Para realizar el cálculo utilizaremos un sistema de coordenadas polares cuyo centro coincida con el centro del semidisco, y consideraremos que este está colocado en la región $y > 0$ del plano. Esta vez reescribiremos la posición general del centro de masa en la forma

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{1}{M} \int_{\text{objeto}} \mathbf{r} dm \quad (2.17)$$

donde \mathbf{r} es la posición del elemento de masa dm ; debido al uso de las coordenadas polares el elemento de masa se expresa en la forma

$$dm = \sigma r dr d\theta \quad (2.18)$$

donde $\sigma = \frac{2M}{\pi R^2}$ es la densidad del semidisco. Por otra parte, sabemos que

$$\mathbf{r} = r (\cos\theta \hat{i} + \sin\theta \hat{j}) \quad (2.19)$$

y por lo tanto la posición del centro de masa se expresa como

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\sigma}{M} (\hat{i} \mathcal{I}_1 + \hat{j} \mathcal{I}_2) \quad (2.20)$$

donde

$$\mathcal{I}_1 = \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr r^2 \cos\theta \quad \text{y} \quad \mathcal{I}_2 = \int_0^\pi d\theta \int_0^R dr r^2 \sin\theta \quad (2.21)$$

el cálculo de las integrales es elemental y resulta

$$\mathcal{I}_1 = 0 \quad y \quad \mathcal{I}_2 = 2 \frac{R^3}{3} \quad (2.22)$$

sustituyendo en \mathbf{r}_{CM} obtenemos finalmente

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{2M}{\pi R^2} \frac{1}{M} R^2 \hat{j} = \frac{4}{3\pi} R \hat{j} \quad (2.23)$$

2.1.5. ¿Como calcular un diferencial de volumen II? (Objetos espaciales)

Como antes las coordenadas cartesianas no hacen más que dividir al espacio en pequeños paralelepípedos elementales de lados dx , dy , dz . Al igual que en el caso plano el elemento de volumen de las coordenadas cartesianas se calcula sin ningún problema, el elemento es sencillamente un cubito de lados dx , dy , dz y por lo tanto el volumen infinitesimal es

$$dv = dx dy dz \quad (2.24)$$

Las coordenadas cilíndricas son una extensión al espacio de las coordenadas polares planas. En las coordenadas polares el plano se divide en círculos que se cortan con semirectas (definidas por los ángulos), las coordenadas cilíndricas se construyen con cilindros rectos cuyo eje es el eje z que se cortan con dos tipos de planos, (i) semiplanos que contienen al eje (z) y planos paralelos al plano $x - y$ de manera que las fórmulas de cambio de coordenadas son (la notación usual asigna la letra griega ρ al radio cilíndrico):

$$x = \rho \cos\phi \quad (2.25)$$

$$y = \rho \sen\phi \quad (2.26)$$

$$z = z \quad (2.27)$$

Los cortes adecuados de un elemento infinitesimal producen un cubito de lados: $ds_\rho = d\rho$, $ds_\phi = \rho d\phi$ y $ds_z = dz$ cuyo volumen es

$$dv = \rho d\rho d\phi dz \quad (2.28)$$

Si prefiere la notación vectorial observe que el desplazamiento infinitesimal en coordenadas cilíndricas está dado por el vector:

$$d\mathbf{r} = d\rho \hat{u}_\rho + \rho d\phi \hat{u}_\phi + dz \hat{k} \quad (2.29)$$

y que por lo tanto el volumen del paralelepípedo formado por los tres desplazamientos ortogonales infinitesimales posibles (radial, tangencial y vertical) está dado por el triple producto:

$$dv = d\vec{s}_\rho \cdot (d\vec{s}_\phi \times d\vec{s}_z) = \rho d\rho d\phi dz \quad (2.30)$$

Finalmente, el sistema de coordenadas esféricas está definido por el corte de superficies esféricas de radio r con conos rectos de semiángulo θ ($0 < \theta < \pi$) que contienen al origen y cuyo eje de simetría es el eje z , y con planos que definen un ángulo azimutal en el plano $x - y$ que coincide con el ángulo polar plano ϕ ($0 < \phi < 2\pi$). En este caso las fórmulas de cambio de coordenadas son:

$$x = r \operatorname{sen}\theta \cos\phi \quad (2.31)$$

$$y = r \operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\phi \quad (2.32)$$

$$z = r \cos\theta \quad (2.33)$$

de manera que los diferenciales de longitud que constituyen los lados de un cubito infinitesimal tienen extensión

$$ds_r = dr \quad (2.34)$$

$$ds_\theta = r d\theta \quad (2.35)$$

$$ds_\phi = r \operatorname{sen}\theta d\phi \quad (2.36)$$

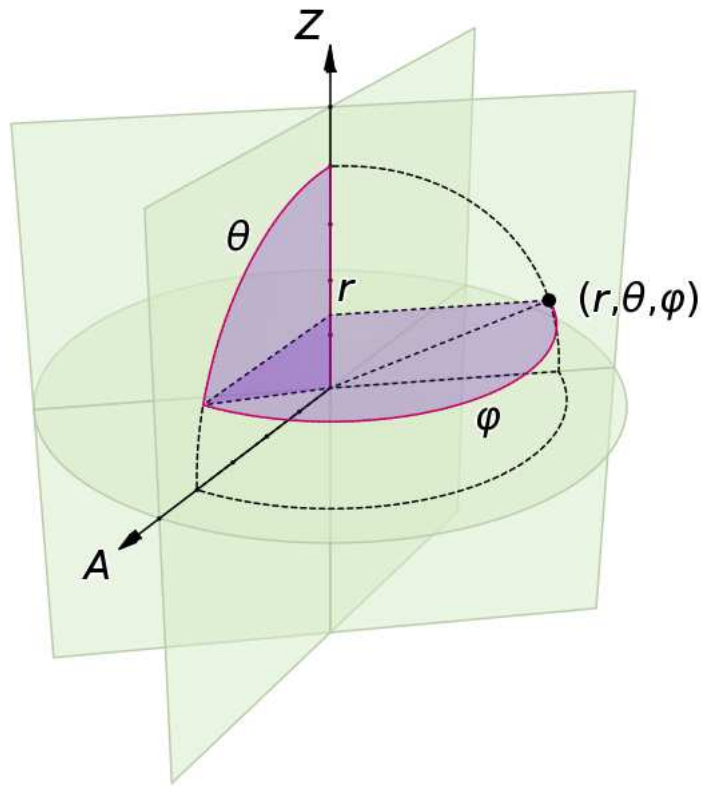


Figura 2.1: El sistema de coordenadas esféricas, el eje marcado con A es el eje azimutal a partir del cual se mide el ángulo ϕ , usualmente el eje azimutal es el eje x

y en consecuencia, el elemento de volumen es

$$dv = r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \quad (2.37)$$

En forma vectorial, el desplazamiento infinitesimal más general posible descrito en coordenadas esféricas está dado por

$$d\mathbf{r} = ds_r \hat{u}_r + ds_\theta \hat{u}_\theta + ds_\phi \hat{u}_\phi, \quad (2.38)$$

de donde, el volumen elemental está dado por

$$dv = d\vec{s}_r \cdot (d\vec{s}_\theta \times d\vec{s}_\phi) = r^2 \operatorname{sen}\theta \, dr \, d\theta \, d\phi \quad (2.39)$$

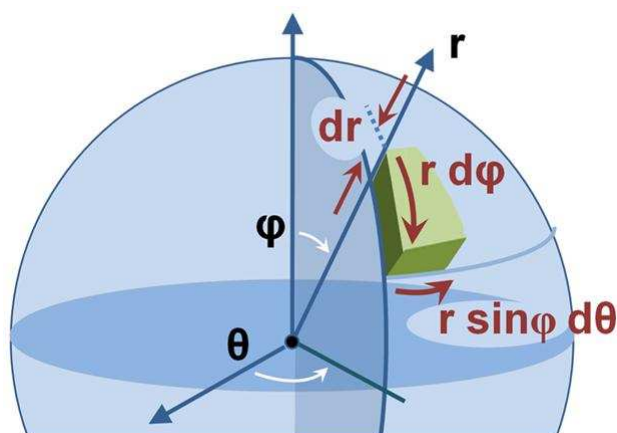


Figura 2.2: El elemento de volumen esférico

2.1.6. Cálculo de centros de masas de figuras volumétricas

Ejemplo 7 Acá queremos calcular la posición del centro de masa de una esfera homogénea de masa M y radio R .

El centro de masa está localizado en el punto

$$\mathbf{r}_C = \frac{1}{M} \int_{\text{esfera}} \mathbf{r} \, dv = \frac{\rho}{M} [\hat{i} \int x \, dv + \hat{j} \int y \, dv + \hat{k} \int z \, dv] \quad (2.40)$$

Examinemos la primera de las integrales, al sustituir la posición x de un elemento de volumen la integral queda como

$$\mathcal{I}_x = \int_{\text{esfera}} r \sin\theta \cos\phi \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi} \cos\phi \, d\phi \int_0^\pi \sin^2\theta \, d\theta \int_0^R r^3 \, dr \quad (2.41)$$

la primera de las tres integraciones (en el ángulo ϕ) es trivialmente nula (se integra $\cos\phi$ en un período completo, y por lo tanto $\mathcal{I}_x = 0$. El resultado para \mathcal{I}_y también es cero por razones análogas, mientras que la integración en z también es nula pero vale la pena verla en detalle,

$$\mathcal{I}_z = \int_{\text{esfera}} r \cos\theta \, r^2 \sin\theta \, dr \, d\theta \, d\phi = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \cos\theta \sin^2\theta \, d\theta \int_0^R r^3 \, dr \quad (2.42)$$

que termina siendo nula por el factor

$$\int_0^\pi \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta = \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} \Big|_0^\pi = 0 \quad (2.43)$$

Ejemplo 8 Otro ejemplo que vale la pena examinar es una semiesfera homogénea de radio R contenida en el semiespacio $z > 0$. En este caso los cálculos son esencialmente idénticos a los presentados en el ejemplo anterior salvo por los límites de integración. Las integrales \mathcal{I}_x e \mathcal{I}_y son nulas por la integración en ϕ , pero la integración \mathcal{I}_z sí que cambia un poco, en efecto,

$$\mathcal{I}_z = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^R r^3 \, dr = \frac{\pi}{4} R^4 \quad (2.44)$$

de manera que al reinsertado los factores faltantes resulta:

$$\mathbf{r}_{CM} = \frac{\rho}{M} \mathcal{I}_z \hat{k} = \frac{3M}{4\pi R^3} \frac{1}{M} \frac{\pi}{4} R^4 \hat{k} = \frac{3}{16} R \hat{k} \quad (2.45)$$

2.2. Teorema del Momentum

La utilidad de la noción del centro de masas no es obvia en este momento, para avanzar algo introduzcamos la siguiente

Definición 2 El momentum total (\mathbf{P}) de un conjunto de partículas está dado por la suma (vectorial) de los momenta individuales, esto es:

$$\mathbf{P} = \sum_i \mathbf{p}_i \quad (2.46)$$

Estudiemos en detalle algunos aspectos de un sistema compuesto de dos (2) partículas de masas m_1 y m_2 . El momentum del sistema está dado por:

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \quad (2.47)$$

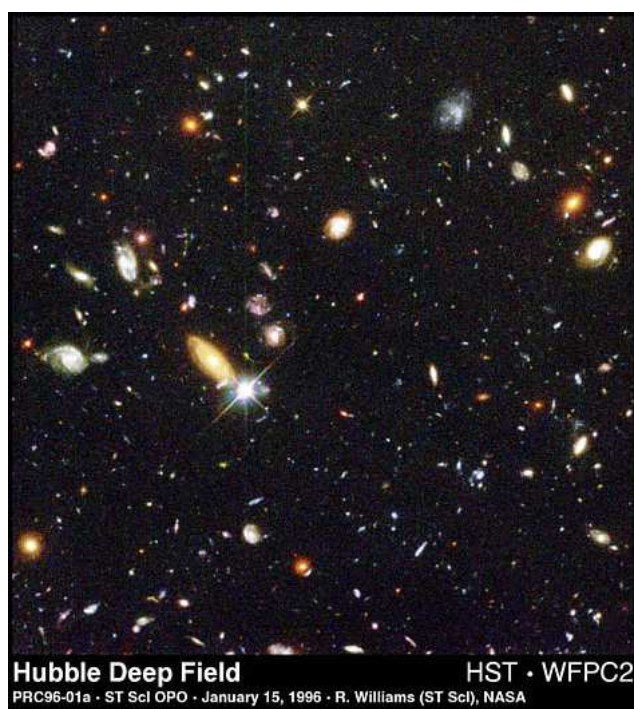


Figura 2.3: El contenido del teorema del momento bellamente ilustrado en esta foto tomada por el telescopio espacial Hubble, cada punto o casi punto es una galaxia que contiene cientos o miles de millones de estrellas, sin embargo, su movimiento como un todo es el de una partícula puntual

mientras que la posición del CM del sistema es

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M}(m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2) \quad (2.48)$$

sí calculamos la derivada temporal de \mathbf{R} resulta

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{R}}{dt} &= \frac{1}{M}[m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2] \\ &= \frac{1}{M}[\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2] \end{aligned} \quad (2.49)$$

es decir, el momentum total del sistema de partículas se expresa como:

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V}, \quad (2.50)$$

donde

$$\mathbf{V} = \frac{d\mathbf{R}}{dt}, \quad (2.51)$$

es la velocidad del centro de masa del sistema (recuerde la sección 1.1). La comparación de las fórmulas (2.47)(2.50) y (2.51), nos dice que el momentum total del sistema es igual al producto de la masa total del sistema por la velocidad del CM. Podemos dar un paso más diferenciando la identidad (2.47) con respecto al tiempo para obtener

$$M \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \dot{\mathbf{p}}_1 + \dot{\mathbf{p}}_2 \quad (2.52)$$

ahora bien, debemos recordar que estamos pensando en la idea de sistema y que por lo tanto la fuerza sobre cada una de las dos partículas debe entenderse como la suma de la fuerza que ejerce la otra y la fuerza (neta) ejercida por todos los agentes externos al sistema, es decir:

$$\dot{\mathbf{P}}_1 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_1^{(ext)} \quad (2.53)$$

$$\dot{\mathbf{P}}_2 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2^{(ext)} \quad (2.54)$$

de manera que la derivada del momentum total del sistema se puede expresar en términos de las fuerzas como

$$M \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}_1^{(ext)} + \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_2^{(ext)}. \quad (2.55)$$

En este punto debemos recordar que las fuerzas ejercidas entre las partículas (\mathbf{F}_{21} y \mathbf{F}_{12}) son pares de acción reacción, así que de acuerdo a la segunda ley de Newton

$$\mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}_{21} = 0 \quad (2.56)$$

de manera, que en definitiva hemos demostrado el siguiente resultado

$$M \frac{d^2 \mathbf{R}}{dt^2} = \mathbf{F}_1^{(ext)} + \mathbf{F}_2^{(ext)} \equiv \mathbf{F}^{(ext)}, \quad (2.57)$$

cuyo significado físico es bastante claro: el centro de masa de un sistema puede considerarse como una partícula de masa M que se mueve bajo la influencia de las fuerzas externas al sistema. este es el resultado que estábamos buscando, en efecto, la igualdad (2.57) nos dice que si queremos aproximar a un sistema por un punto, el punto debe estar localizado en el centro de masa del sistema y debe tener por masa la suma de las masas de las partículas que forman el sistema), más aún, el movimiento del punto que sustituye al sistema está dictado solamente por las fuerzas externas al sistema y en consecuencia, los detalles de los movimientos internos de las partículas que forman al sistema son irrelevantes para el movimiento del centro de masa.

Es importante que comentemos que este resultado es totalmente general al punto de poder ser enunciado en la siguiente forma:

Teorema 2 *El momentum total de un sistema de partículas (\mathbf{P}) es igual al producto de la masa del sistema por la velocidad de su centro de masa, y obedece la ley de movimiento*

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \mathbf{F}^{(ext)} \quad (2.58)$$

donde $\mathbf{F}^{(ext)}$ es la fuerza externa neta que actúa sobre el sistema.

La demostración del teorema se deja como ejercicio interesante. Volviendo al teorema (2) referente al momentum lineal de un sistema, veamos un par de corolarios. El primero (y más evidente) de ellos es el siguiente

Corolario 1 *Si la fuerza externa neta que actúa sobre un sistema es nula, el sistema tendrá momentum constante*

La demostración de este resultado es inmediata y se deja como ejercicio. El segundo corolario es el siguiente

Corolario 2 *Si la componente de la fuerza externa neta a lo largo de una cierta dirección es nula, el momentum del sistema a lo largo de esa dirección será constante constante*

en términos más precisos, si \mathbf{n} es un vector constante y $\mathbf{F}^{(ext)} \cdot \mathbf{n} = 0$ entonces $\mathbf{P} \cdot \mathbf{n} = \text{constante}$. A pesar de que este corolario tiene un enunciado algo menos trivial que el primero su prueba también es inmediata.

El último de los corolarios tiene un significado físico bastante interesante que podemos ilustrar fácilmente. Consideremos el movimiento de una masa puntual bajo una fuerza constante (\mathbf{F}_0) (pensemos por ejemplo en el lanzamiento balístico de manera que la fuerza coincida con el peso) y sea \mathbf{e} un vector ortogonal a la fuerza (en el ejemplo, un vector horizontal), ciertamente $\mathbf{F}_0 \cdot \mathbf{e} = 0$ y por lo tanto $\mathbf{P} \cdot \mathbf{e} = \text{constante}$, ahora bien el momentum de la partícula no es más que el producto de su masa y su velocidad, de esta manera, el corolario refleja el hecho de que la componente horizontal de la velocidad en un lanzamiento parabólico es constante.

Ejemplo 9 *Consideremos un sistema formado por tres masas idénticas entre las que se han colocado dos resortes (sin masa) comprimidos. El sistema está colocado en reposo sobre una mesa sin rozamiento y se mantiene unido gracias a unos hilos. En cierto instante los hilos se cortan y las masas comienzan a moverse sobre la mesa. Sabiendo que la energía amacendada en los resortes es E_0 y que la velocidad de dos de las masas \mathbf{u}_1 y \mathbf{u}_2 es de idéntica magnitud y forman 90° entre sí, ¿cuales serán las velocidades de las tres masas?*

Para comenzar escogamos un sistema de referencia cuyo centro se encuentre en la posición inicial del centro de masa del sistema, y dotémosle de un sistema de coordenadas cartesianas cuyo eje z es perpendicular a la mesa y cuyos ejes x e y son paralelos a las velocidades \mathbf{u}_1 y

u₂. De acuerdo a la información que poseemos podemos poner

$$\mathbf{p}_1 = p \hat{\mathbf{i}}, \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_2 = p \hat{\mathbf{j}}. \quad (2.59)$$

Por otra parte, el momentum inicial del sistema es nulo y como no hay ninguna fuerza horizontal externa el momentum horizontal del sistema debe mantenerse nulo, por tanto, si \mathbf{p}_3 es el momentum de la masa cuya velocidad es totalmente desconocida, podemos asegurar que

$$\mathbf{p}_3 = -p (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}). \quad (2.60)$$

Finalmente, la energía cinética del sistema se calcula como

$$T = \sum \frac{p_i^2}{2m} = \frac{2}{m} p^2 \quad (2.61)$$

esta energía debe ser idéntica a la energía almacenada en los resortes, y por lo tanto

$$\frac{2}{m} p^2 = 2m v^2 = E_0 \quad (2.62)$$

de donde:

$$\mathbf{v}_1 = \sqrt{\frac{E_0}{2m}} \hat{\mathbf{i}} \quad (2.63)$$

$$\mathbf{v}_2 = \sqrt{\frac{E_0}{2m}} \hat{\mathbf{j}} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{v}_3 = -\sqrt{\frac{E_0}{2m}} (\hat{\mathbf{i}} + \hat{\mathbf{j}}) \quad (2.65)$$

Ejemplo 10 Hemos insistido en que estamos interesados en discutir sistemas de partículas y con el fin de entender algunos aspectos del problema general, comenzaremos nuestra discusión con un sistema bastante sencillo que consiste en dos bolas pequeñas de masa M (que consideraremos puntuales) unidas por una barra rígida, sin masa, de longitud $2a$. Para ser aún más específicos, supongamos que el centro de la barra se desplaza uniformemente a lo largo del eje

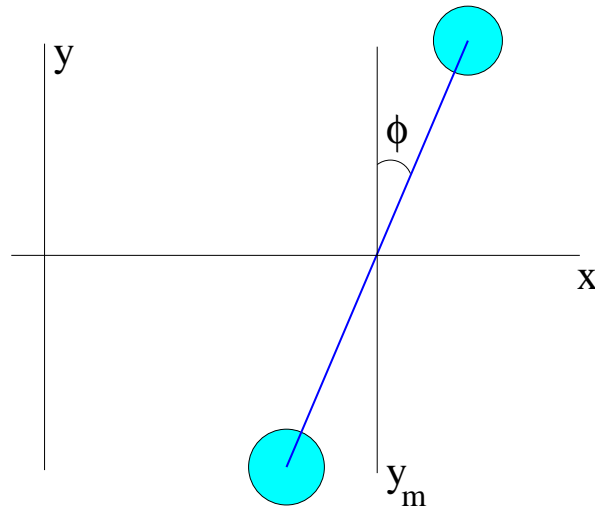


Figura 2.4: La haltera del ejemplo 10

x con rapidez ν_0 mientras que la barra rota uniformemente alrededor de su centro. De esta manera, las posiciones de las partículas son

$$x_1(t) = \nu_0 t + a \operatorname{sen} \phi, \quad y_1(t) = a \operatorname{cos} \phi \quad (2.66)$$

$$x_2(t) = \nu_0 t - a \operatorname{sen} \phi, \quad y_2(t) = -a \operatorname{cos} \phi \quad (2.67)$$

donde el ángulo ϕ es el ángulo -medido en sentido horario- que forman la barrita y una recta paralela al eje y que pasa por el centro de la barrita.

Al calcular explícitamente el Momentum total del sistema -como suma de los momenta de cada partícula- obtenemos

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= M (\dot{x}_1 + \dot{x}_2) \hat{\mathbf{i}} + M (\dot{y}_1 + \dot{y}_2) \hat{\mathbf{j}} \\ &= M [\nu_0 + a \dot{\phi} (\operatorname{cos} \phi - \operatorname{cos} \phi)] \hat{\mathbf{i}} + M a [\dot{\phi} (\operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi)] \hat{\mathbf{j}} = M \nu_0 \hat{\mathbf{i}} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Analícemos este resultado a la luz de lo que hemos aprendido hasta este punto. En primer lugar, es evidente que el centro de masa del sistema se encuentra localizado en el centro de

la barra, por otra parte, no es menos obvio el hecho de que el centro de la barra se mueve con velocidad $\vec{V}_{CM} = \nu_0 \hat{\mathbf{i}}$ de manera que la fórmula (2.68) no hace más que confirmar que el momentum del sistema es igual al producto de la masa del sistema por la velocidad de su centro de masa.

2.3. Energía Cinética de un Sistema

Hemos comentado que para la dinámica del centro de masa el movimiento interno del sistema es irrelevante, esto parece simplificar demasiado las cosas ya que no parece razonable que todos los sistemas puedan reducirse a puntos y nada más. Vamos a estudiar una cantidad física en la cual los detalles del movimiento interno aparecen en forma natural, con este fin vamos a introducir un conjunto de sistemas de referencia auxiliares, estos sistemas están definidos de tal forma que en cada instante de tiempo uno de ellos tiene su origen en la posición del centro de masas del sistema y se mueve con la misma velocidad de aquel en ese instante, todos los sistemas son paralelos entre sí y todos son inerciales centro de masa del sistema a esta colección de sistemas de referencia se le conoce como el referencial del centro de masas. Los vectores de posición de las partículas de nuestro sistema de prototipo (consistente en solo dos partículas) son

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_1^{(c)} \quad (2.69)$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{R} + \mathbf{r}_2^{(c)} \quad (2.70)$$

donde $\mathbf{r}_1^{(c)}$ y $\mathbf{r}_2^{(c)}$ son las posiciones de las partículas en el sistema del centro de masa. En relación al sistema de coordenadas del CM se puede probar que (ejercicio) *El momentum total medido en el sistema del centro de masa es nulo*

Ejemplo 11 Volvamos a considerar la haltera que estudiamos en el ejemplo 10. Ya hemos encontrado que la velocidad del centro de masa del sistema es $\vec{V} = \nu_0 \hat{\mathbf{i}}$, y en consecuencia las velocidades relativas de las partículas con respecto al centro de masa son $\mathbf{u}_1 = a \dot{\phi} \hat{u}_\phi^{(+)}$ y $\mathbf{u}_2 = a \dot{\phi} \hat{u}_\phi^{(-)}$ donde $\hat{u}_\phi^{(\pm)} = \pm \cos\phi \hat{\mathbf{i}} \mp \sin\phi \hat{\mathbf{j}}$

Al calcular los cuadrados de los momenta individuales de cada partícula obtenemos

$$\begin{aligned} p_1^2 &= M^2 (\nu_0 + a \dot{\phi} \cos\phi)^2 + a^2 \dot{\phi}^2 \sin^2\phi = \\ &= M^2 \nu_0^2 + 2 M^2 a \dot{\phi} \cos\phi + M^2 a^2 \dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (2.71)$$

$$\begin{aligned} p_2^2 &= M^2 (\nu_0 - a \dot{\phi} \cos\phi)^2 + a^2 \dot{\phi}^2 \sin^2\phi = \\ &= M^2 \nu_0^2 - 2 M^2 a \dot{\phi} \cos\phi + M^2 a^2 \dot{\phi}^2 \end{aligned} \quad (2.72)$$

de manera que al calcular la energía cinética resulta

$$T = \frac{p_1^2}{2M} + \frac{p_2^2}{2M} = \frac{2M\nu_0^2}{2} + \frac{M a^2 \dot{\phi}^2}{2} + \frac{M a^2 \dot{\phi}^2}{2}. \quad (2.73)$$

El primer término de esta suma es evidentemente la energía cinética traslacional del centro de masa del sistema (a estos términos se les denomina de energía interna), los otros dos términos representan la suma de las energías cinéticas de cada uno de los miembros del sistema medidos desde el centro de masa. Nótese que si $a \rightarrow 0$ el sistema es un sistema puntual y que por lo tanto en ese caso no puede haber energía cinética interna del sistema.

Queremos sistematizar el resultado que hemos encontrado en el ejemplo anterior, es decir, queremos ver si es posible encontrar una expresión para la energía cinética total del sistema que involucre a la velocidad del centro de masa y posiblemente a las velocidades relativas de las partículas del sistema con respecto al centro de masa del mismo, para ello recordemos una vez más que la energía cinética no es más que la suma de las energías de cada partícula, esto es

$$T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2, \quad (2.74)$$

ahora bien, si escribimos las velocidades en términos de la velocidad del centro de masa (\vec{V}) y de las velocidades relativas $\mathbf{u}_1 = \dot{\mathbf{r}}_1^{(c)}$, $\mathbf{u}_2 = \dot{\mathbf{r}}_2^{(c)}$ resulta

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}m_1(\vec{V} + \mathbf{u}_1)^2 + \frac{1}{2}m_2(\vec{V} + \mathbf{u}_2)^2 = \\ &= \frac{1}{2}m_1 [V^2 + 2\vec{V} \cdot \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_1^2] + \frac{1}{2}m_2 [V^2 + 2\vec{V} \cdot \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_2^2] \\ &= \frac{1}{2}(m_1 + m_2)V^2 + \vec{V} \cdot (m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2) + \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2. \end{aligned} \quad (2.75)$$

Por otra parte, $m_1\mathbf{u}_1 + m_2\mathbf{u}_2 = 0$ ya que esta cantidad es el momentum total relativo al centro de masa, de manera que hemos probado que

$$T = \frac{M}{2}V^2 + T^{(rel)}, \quad (2.76)$$

donde

$$T^{(rel)} = \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2. \quad (2.77)$$

Una vez más dar una interpretación física a un resultado matemático es a la vez sencillo pero extremadamente interesante, la fórmula (2.76) nos dice que la energía cinética del sistema no es solamente la energía cinética de una partícula de masa M moviéndose con el centro de masa sino que hay que tomar en cuenta la energía asociada a los movimientos de la estructura interna del sistema. Este resultado también se generaliza a un sistema con un número arbitrario de partículas, en cuyo caso el enunciado es el siguiente

Teorema 3 *La energía cinética total (T) de un sistema de partículas es la suma de dos términos, la energía cinética del centro de masas y la energía cinética de las partículas del sistema calculadas con las velocidades relativas al centro de masas*

$$T = \frac{MV^2}{2} + T^{(rel)}, \quad \text{donde} \quad T^{(rel)} \equiv \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}m_iu_i^2 \quad (2.78)$$

2.4. El Referencial de Momentum Cero

Otra forma -muy natural por cierto- de introducir el centro de masa es definiendo un sistema de referencia en el cual el momentum del sistema que se considere sea nulo. En efecto, consideremos un sistema de N partículas de masas m_1, m_2, \dots, m_N cuyas posiciones con respecto a algún observador inercial están dadas por $\mathbf{r}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, N$. Queremos inquirir acerca de la posibilidad de definir un nuevo sistema de coordenadas en el que el momentum total del sistema:

$$\mathbf{P} = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (2.79)$$

se anule.

Supongamos que tal referencial (S) existe y llamemos \mathbf{r}'_i a la posición de la i -ésima partícula con respecto a S , entonces, si llamamos \mathbf{P}' al momentum del sistema con respecto a S tendremos:

$$\mathbf{P}' = \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}'_i = 0 \quad (2.80)$$

donde los vectores \mathbf{r}'_i representan las posiciones de las partículas con respecto a S . Ciertamente: $\mathbf{r}_i = \mathbf{R}_{OS} + \mathbf{r}'_i$ y por lo tanto de existir S debe ocurrir que

$$\sum_i m_i [\mathbf{v}_i - \vec{V}] = 0 \quad (2.81)$$

donde $\mathbf{V} = \dot{\mathbf{R}}_{OS}$ y $\mathbf{v}_i = \dot{\mathbf{r}}_i$. De acuerdo a este resultado, S es un sistema de referencia que debe moverse con respecto a O con velocidad

$$\vec{V} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \dot{\mathbf{r}}_i \quad (2.82)$$

donde $M = \sum_i m_i$ es la masa total del sistema. Más aún podemos integrar para obtener que la posición de S con respecto a O está dada por:

$$\mathbf{R} = \frac{1}{M} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad (2.83)$$

que efectivamente es la posición del centro de masa.

Capítulo 3

Cinemática de las Rotaciones

3.1. Motivación

En este capítulo queremos estudiar movimientos que se reducen a una rotación pura. Para ello vamos a introducir una noción nueva que consiste en asociar un carácter vectorial a la velocidad angular. Con este fin, y para comenzar la discusión, consideremos una partícula de masa M que se mueve en una trayectoria circular, de manera que su velocidad se expresa como

$$\mathbf{v} = R \dot{\theta} \hat{\mathbf{u}}_{\theta} \quad (3.1)$$

ahora bien, sabemos que la base de versores $\{\hat{\mathbf{u}}_r, \hat{\mathbf{u}}_{\theta}, \hat{\mathbf{k}}\}$ satisface $\hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{u}}_r = \hat{\mathbf{u}}_{\theta}$ lo que nos permite poner

$$\mathbf{v} = \dot{\theta} \hat{\mathbf{k}} \times R \hat{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{r} \quad (3.2)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición de la partícula, esto sugiere asociar la velocidad angular con el siguiente vector

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \dot{\theta} \hat{\mathbf{k}}. \quad (3.3)$$

Según esta definición, la velocidad angular debiera ser un vector de magnitud $\dot{\theta}$ con dirección ortogonal al plano de rotación y orientado según la regla de la mano derecha. La posibilidad de hacer esta asociación resulta aún más tentadora cuando observamos que -en el caso que estamos estudiando- si multiplicamos la tasa de giro $\dot{\theta}$ por un factor, el vector velocidad angular quedará multiplicado por dicho factor, además, como estamos utilizando vectores podríamos considerar la suma de dichos vectores para asociarla con la suma de velocidades angulares.

Una ventaja adicional de la propuesta consiste en que esta nos permitiría expresar el Momento angular de la partícula (medido con respecto al centro de coordenadas) como lo definimos cuando estudiamos el movimiento bajo la acción de fuerzas centrales como

$$\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}, \quad \text{donde: } I \equiv MR^2 \quad . \quad (3.4)$$

Más adelante vamos a aprender que el Momentum angular representa un análogo rotacional del Momentum lineal ($\mathbf{p} = m \mathbf{v}$), en el que el papel de la masa lo juega la cantidad I denominada “momento de inercia”.

En las siguientes secciones vamos a estudiar en detalle notando particularmente las dificultades las ideas que acabamos de introducir con respecto a la velocidad angular.

3.2. El Carácter Vectorial de la Velocidad Angular

3.2.1. Rotaciones en un plano

Consideremos un vector (\mathbf{A}) en el plano $x - y$ ¹. Si designamos por $\mathbf{A}' (= a'_x \hat{\mathbf{e}}_x + a'_y \hat{\mathbf{e}}_y)$ al vector que resulta de rotar al vector \mathbf{A} en un ángulo θ alrededor del eje z (esto es alrededor de un eje perpendicular al plano $x - y$) en sentido antihorario, las componentes de ambos vectores

¹en coordenadas cartesianas $\mathbf{A} = a_x \hat{\mathbf{e}}_x + a_y \hat{\mathbf{e}}_y$

estarán relacionadas, y la relación está dada por la siguiente expresión matricial

$$\begin{pmatrix} a'_x \\ a'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Estamos interesados en estudiar el caso especial en que el ángulo de rotación es infinitesimal (ángulo de rotación: $\delta\theta \rightarrow 0$). En tal caso: $\cos(\delta\theta) \approx 1$ y $\operatorname{sen}\delta\theta \approx \delta\theta$ de forma que la matriz que representa a la rotación se reduce a

$$\mathbf{M}(\delta\theta) = \begin{pmatrix} 1 & -\delta\theta \\ \delta\theta & 1 \end{pmatrix}; \quad (3.6)$$

al calcular el producto matricial (3.5) en forma explícita resulta

$$\begin{aligned} a'_x &= a_x - \delta\theta a_y \\ a'_y &= a_y + \delta\theta a_x, \end{aligned} \quad (3.7)$$

por otra parte observemos que

$$\delta\theta \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{A} = -\delta\theta a_y \hat{\mathbf{e}}_x + \delta\theta a_x \hat{\mathbf{i}} \quad (3.8)$$

de acuerdo a esto, podemos expresar la rotación infinitesimal en la forma

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \delta\theta \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}. \quad (3.9)$$

La última fórmula nos dice que para rotar un vector \mathbf{A} un ángulo pequeño basta con sumar a \mathbf{A} un vector $\delta\mathbf{A}$ que se construye como el producto vectorial de \mathbf{A} por un vector ortogonal al plano de rotación con módulo $\delta\theta$.

Por otra parte, las rotaciones finitas conmutan entre si ya que corresponden a rotaciones alrededor de la suma de los ángulos de cada una de las rotaciones individuales, esto lo podemos ver notando el producto de las matrices que corresponden:

$$\begin{pmatrix} \cos \theta_1 & -\operatorname{sen} \theta_1 \\ \operatorname{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & -\operatorname{sen} \theta_2 \\ \operatorname{sen} \theta_2 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) \\ \operatorname{sen}(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Esta correspondencia demuestra la conmutatividad de la composición de las rotaciones en un plano como inducida a la conmutatividad de la suma de los ángulos. La conmutatividad de rotaciones nos permite asociar naturalmente (al menos para rotaciones en el plano) la velocidad angular con un vector.

Para convencernos de esto pensemos en un vector contenido en el plano $x-y$ que está rotando con velocidad angular ω . En el instante de tiempo t el vector es $\mathbf{A}(t)$, mientras que luego de transcurrido un intervalo infinitesimal dt tenemos a un nuevo vector $\mathbf{A}(t+dt)$ que se obtiene a partir de $\mathbf{A}(t)$ por una rotación de ángulo infinitesimal $\delta\theta = \omega dt$, la fórmula (3.9) nos permite expresar el vector $\mathbf{A}(t+dt)$ en la forma:

$$\mathbf{A}(t+dt) = \mathbf{A}(t) + \omega dt \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}(t) \quad (3.11)$$

de donde resulta

$$d\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}(t+dt) - \mathbf{A}(t) = (\omega dt) \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}(t). \quad (3.12)$$

En definitiva, la tasa de cambio temporal del vector \mathbf{A} está dada por

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{A} \quad , \quad (3.13)$$

donde el se ha definido al vector de velocidad angular como:

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \omega \hat{\mathbf{k}} \quad . \quad (3.14)$$

Es decir: un vector perpendicular al plano de rotación y con magnitud $|\boldsymbol{\omega}| = \omega$.

3.2.2. Rotaciones alrededor de un eje arbitrario

Queremos estudiar las rotaciones en casos más generales en que el eje de rotación no es fijo, en este caso nos encontramos con una dificultad inmediata, las rotaciones de ángulo finito no conmutan entre sí y por lo tanto no es posible asociarlas a vectores, una forma elemental de observar la no conmutatividad de las rotaciones finitas consiste en realizar un experimento como el que se exhibe en la figura 3.1

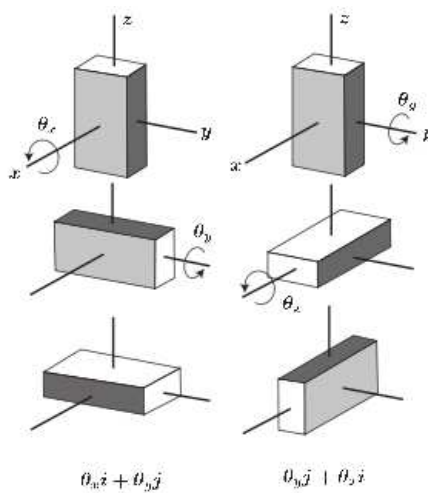


Figura 3.1: Si se rota a un cuerpo alrededor de dos ejes fijos en ángulos de 90° el resultado depende del orden con que se efectúan las rotaciones

Consideremos ahora un problema mucho más general, un vector \mathbf{A} y un eje de rotación definido por un vector unitario $\hat{\mathbf{n}}$ arbitrario. Pretendemos encontrar una expresión general que nos permita calcular el vector que se obtiene de \mathbf{A} luego de efectuar una rotación infinitesimal de ángulo $\delta\theta$ alrededor del eje de rotación. Con este fin descompongamos al vector \mathbf{A} en la forma

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp} \quad , \quad (3.15)$$

donde $\mathbf{A}_{\parallel} \equiv (\mathbf{A} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}}$ es la proyección longitudinal de \mathbf{A} con respecto al eje de rotación mientras que \mathbf{A}_{\perp} es la componente de \mathbf{A} ortogonal al eje. Llamemos \mathbf{A}' al vector que se obtiene a partir de \mathbf{A} luego de la rotación. Es claro que como la rotación no tiene efecto en \mathbf{A}_{\parallel} pero que si afecta a la componente transversa. De acuerdo a esto

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}'_{\perp}. \quad (3.16)$$

Donde \mathbf{A}'_{\perp} es el resultado de rotar al vector \mathbf{A}_{\perp} ; ahora bien, este vector rota en el plano perpendicular al eje $\hat{\mathbf{n}}$ y por lo tanto podemos utilizar lo que aprendimos en la sección 3.2.1 para poner

$$\mathbf{A}'_{\perp} = \mathbf{A}_{\perp} + \delta\theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}_{\perp}, \quad (3.17)$$

pero, en vista de que $\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}_{\parallel} = 0$, podemos reescribir

$$\mathbf{A}'_{\perp} = \mathbf{A}_{\perp} + \delta\theta \hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{A}_{\perp} + \mathbf{A}_{\parallel}) = \mathbf{A}_{\perp} + \delta\theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A} \quad (3.18)$$

Sustituyendo este resultado en la fórmula (3.16) obtenemos

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A}_{\parallel} + \mathbf{A}_{\perp} + \delta\theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A} = \mathbf{A} + \delta\theta \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{A}. \quad (3.19)$$

Veamos lo que ocurre si hacemos dos rotaciones infinitesimales consecutivas, la primera con eje $\hat{\mathbf{n}}_1$ de ángulo $\delta\theta_1$ y la segunda con eje $\hat{\mathbf{n}}_2$ de ángulo $\delta\theta_2$. Según lo que hemos aprendido hasta ahora, si llamamos \mathbf{A}_1 al resultado que obtenemos luego de la primera rotación es

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A} + \delta\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{A}. \quad (3.20)$$

Llamemos ahora $\mathbf{A}_{1,2}$ el resultado de rotar a este vector según la segunda rotación, es decir:

$$\mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{A}_1 + \delta\theta_2 \hat{\mathbf{n}}_2 \times \mathbf{A}_1, \quad (3.21)$$

sustituyendo \mathbf{A}_1 resulta finalmente

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{1,2} &= \mathbf{A} + \delta\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{A} + \delta\theta_2 \hat{\mathbf{n}}_2 \times (\mathbf{A} + \delta\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{A}) = \\
 &= \mathbf{A} + (\delta\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{A} + \delta\theta_2 \hat{\mathbf{n}}_2 \times \mathbf{A}) + \{\delta\theta_2 \hat{\mathbf{n}}_2 \times (\delta\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{A})\} \\
 &= \mathbf{A} + (\delta\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1 + \delta\theta_2 \hat{\mathbf{n}}_2) \times \mathbf{A} + \{\delta\theta_2 \hat{\mathbf{n}}_2 \times (\delta\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1 \times \mathbf{A})\}. \quad (3.22)
 \end{aligned}$$

Si efectuamos las mismas operaciones pero en el otro orden posible, esto es, primero realizamos la rotación 2 y luego la 1 obtendremos

$$\mathbf{A}_{2,1} = \mathbf{A} + (\delta\theta_2 \hat{\mathbf{n}}_2 + \delta\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1) \times \mathbf{A} + \{\delta\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1 \times (\delta\theta_2 \hat{\mathbf{n}}_2 \times \mathbf{A})\}. \quad (3.23)$$

De acuerdo con estas fórmulas, si despreciamos los infinitésimos de orden superior (es decir si utilizamos el hecho de que $\delta\theta_1 \delta\theta_2 \ll \delta\theta_1$ y $\delta\theta_1 \delta\theta_2 \ll \delta\theta_2$ resulta que

$$\mathbf{A}_{1,2} = \mathbf{A} + (\delta\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1 + \delta\theta_2 \hat{\mathbf{n}}_2) \times \mathbf{A} \approx \mathbf{A} + (\delta\theta_2 \hat{\mathbf{n}}_2 + \delta\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1) \times \mathbf{A} = \mathbf{A}_{2,1}, \quad (3.24)$$

En otras palabras, en vista de que la suma de vectores es conmutativa, las rotaciones infinitesimales conmutan entre sí (vea la figura 3.2), esto nos permite asociar a cada rotación infinitesimal de ángulo $\delta\theta$ y eje $\hat{\mathbf{n}}$ el vector $\mathbf{r}_{\delta\theta} = \delta\theta \hat{\mathbf{n}}$ y operar con las rotaciones a través de la suma los vectores correspondientes, en el caso que acabamos de examinar, la rotación final quedará representada por el vector

$$\mathbf{r} = \delta\theta_1 \hat{\mathbf{n}}_1 + \delta\theta_2 \hat{\mathbf{n}}_2 \delta\theta \hat{\mathbf{u}}_n, \quad (3.25)$$

donde $\hat{\mathbf{u}}_n$ y $\delta\theta$ el eje y el ángulo de la rotación compuesta deben ser determinados.

Recapitulando, una rotación infinitesimal puede asociarse con un vector, pero más aún, la composición de rotaciones infinitesimales es conmutativa y podemos asociar la composición de tales rotaciones con la adición de los vectores correspondientes (lo que asegura la conmutatividad de la composición de rotaciones infinitesimales via la conmutatividad de la adición vectorial).

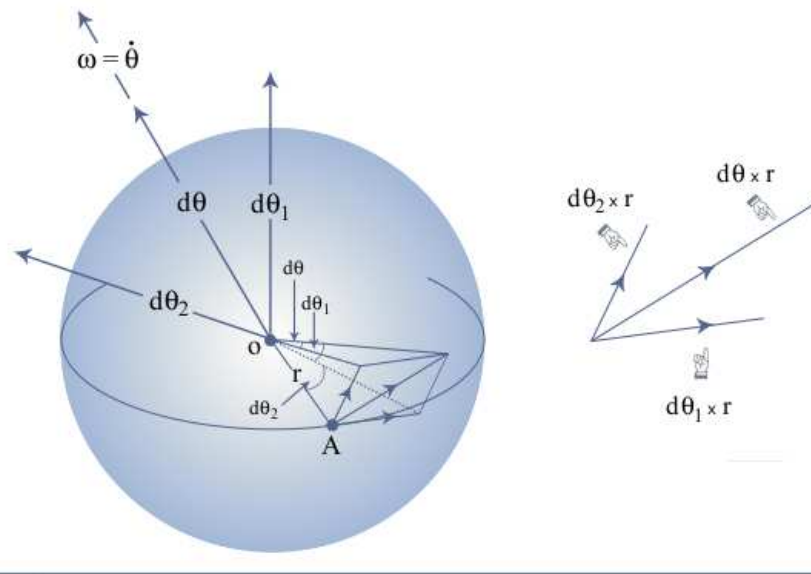


Figura 3.2: Las rotaciones infinitesimales a lo largo de ejes diferentes si conmutan, el orden en que se llevan a cabo no es importante.

Gracias a esta construcción -y al igual que en el caso bidimensional- es posible definir la velocidad angular vectorial como un vector cuya dirección coincide con el eje de rotación. En efecto, si en un cierto instante de tiempo un vector $\mathbf{v}(t)$ está cambiando solo por una rotación pura alrededor de un eje $\hat{\mathbf{n}}$ (denominado eje instantáneo de rotación) a una tasa instantánea ω , en un intervalo infinitesimal de tiempo el vector rota un ángulo infinitesimal ωdt alrededor de $\hat{\mathbf{n}}$ de donde obtenemos

$$\mathbf{v}(t + dt) = \mathbf{v}(t) + \omega dt \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v} \quad (3.26)$$

de manera que

$$\frac{\mathbf{v}(t + dt) - \mathbf{v}(t)}{dt} = \omega \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{v} \equiv \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}, \quad (3.27)$$

en donde la velocidad angular vectorial es el producto de la tasa de rotación por unidad de

tiempo y el eje instantáneo de rotación.

Ejemplo 12 En el sistema de la figura 12 podemos apreciar disco horizontal que rota alrededor de un eje vertical que pasa por su centro, en una ranura de este disco -al que de ahora en adelante denominaremos: mesa rotante- se coloca un eje horizontal sobre el que se monta un pequeño disco vertical D . Si se conocen la tasa de rotación de la mesa rotante alrededor de su eje, y la tasa de rotación del dico chico alrededor de su eje, ¿cuál será la velocidad angular del disco D ?

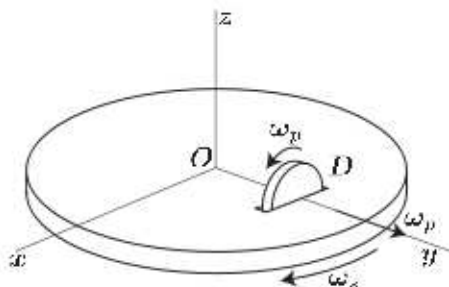


Figura 3.3: Una mesa rotante en la que colocamos un pequeño disco D que gira alrededor de un eje horizontal solidario con la mesa

Vamos a estudiar este problema con el mínimo de teoría, es decir, sin utilizar los resultados fundamentales de este capítulo, con este fin consideraremos dos sistemas de coordenadas cuyo origen coincide con el centro de la mesa rotante, uno fijo y uno solidario con esta, definiremos como ϕ al ángulo que el eje x' hace con el eje x

Para encontrar la velocidad angular del disco debemos notar que la velocidad angular de la mesa rotante es $\omega_1 = \dot{\phi} \hat{\mathbf{k}}$, mientras que el disco D está rotando alrededor del eje \hat{i}' con tasa $\dot{\psi}$ es decir, con velocidad angular $\omega_2 = \dot{\psi} \hat{i}'$.

Según nuestra descripción de los sistemas de coordenadas podemos poner

$$\hat{i}' = \cos\phi\hat{i} + \text{sen}\phi\hat{j} \quad (3.28)$$

$$\hat{j}' = -\text{sen}\phi\hat{i} + \cos\phi\hat{j} \quad (3.29)$$

Para entender la física del problema consideremos un vector \mathbf{v} perteneciente al disco D (que por lo tanto posee un movimiento solidario con D), en ese caso, si ψ es el ángulo entre dicho vector y el eje y' podremos escribir

$$\mathbf{v} = V \left(\cos\psi\hat{j}' + \text{sen}\psi\hat{\mathbf{k}} \right) \quad (3.30)$$

al diferenciar resulta

$$\dot{\mathbf{v}} = V\dot{\psi} \left(-\text{sen}\psi\hat{j}' + \cos\psi\hat{\mathbf{k}} \right) + V\cos\psi\dot{\hat{j}}'. \quad (3.31)$$

Es fácil ver que $\dot{\hat{j}}' = -\dot{\phi}\hat{i}'$, por otra parte, $\hat{i}' = \hat{j}' \times \hat{\mathbf{k}} = -\hat{\mathbf{k}} \times \hat{j}'$, de manera que podemos poner

$$\dot{\mathbf{v}} = V\dot{\psi} \left(-\text{sen}\psi\hat{j}' + \cos\psi\hat{\mathbf{k}} \right) + V\dot{\phi}\hat{\mathbf{k}} \times (\cos\psi\hat{j}'). \quad (3.32)$$

Ahora vamos a notar un par de cosas divertidas, en primer lugar, el vector $\hat{\mathbf{u}} = -\text{sen}\psi\hat{j}' + \cos\psi\hat{\mathbf{k}}$ puede reescribirse como

$$\hat{\mathbf{u}} = \hat{i}' \times \left(\cos\psi\hat{j}' + \text{sen}\psi\hat{\mathbf{k}} \right). \quad (3.33)$$

En segundo lugar,

$$\hat{\mathbf{k}} \times (\cos\psi\hat{j}') = \hat{\mathbf{k}} \times \left(\cos\psi\hat{j} + \text{sen}\psi\hat{\mathbf{k}}' \right). \quad (3.34)$$

Poniendo juntas las cosas podemos concluir que

$$\dot{\mathbf{v}} = \dot{\psi}\hat{i} \times \mathbf{v} + \dot{\phi}\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{v} = (\boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2) \times \mathbf{v} \quad (3.35)$$

de manera que la velocidad angular del disco D es

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \quad (3.36)$$

Ejemplo 13 Como una muestra de que el estudio de la teoría rinde frutos, consideremos el problema anterior a la luz de los tecnicismos que hemos elaborado en este capítulo.

Según lo que hemos aprendido en el capítulo las velocidades angulares son vectores que obedecen el álgebra vectorial usual. Por lo tanto la velocidad angular del disco D es sencillamente

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \quad (3.37)$$

que evidentemente coincide con el resultado anterior (pero obtenido de manera mucho menos dolorosa).

3.3. Problemas Propuestos

Problema 7 Escriba la velocidad angular del ejemplo 12 en la forma $\boldsymbol{\omega} = \Omega \hat{\mathbf{n}}$, es decir, encuentre la dirección del eje instantáneo de rotación y la tasa y sentido de giro del disco D alrededor de dicho eje.

Problema 8 ¿Puede expresar una rotación finita en el plano x - y como un producto vectorial?

Problema 9 Analice cuidadosamente la figura 3.2 para que se convenza de la conmutatividad de las rotaciones infinitesimales

Capítulo 4

Dinámica de los Cuerpos Rígidos

4.1. Motivación

Hasta ahora nos hemos concentrado en estudiar el movimiento del centro de masa de un sistema de partículas. Ahora bien, sabemos que esto es una sobresimplificación puesto que aun si el centro de masa viaja uniformemente debido a que las fuerzas externas al sistema se anulen, el comportamiento interno del sistema puede ser complejo

En este capítulo nos limitaremos a estudiar sistemas cuyo movimiento interno se reduce a una rotación pura.

4.2. Momentum Angular

Nuestro objetivo consiste en describir algunos aspectos de la dinámica de los cuerpos rígidos, definidos como sistemas de partículas cuyas posiciones relativas permanecen fijas. Como aprenderemos, el movimiento de un objeto de este tipo puede entenderse en términos del movimiento de su centro de masa y un movimiento de rotación residual que se describe convenientemente



Figura 4.1: A pesar de que una galaxia es un objeto complejo, su centro de masa se mueve como un punto, mientras que el detalle del movimiento interno de las estrellas que la forman está codificado en el *Momentum angular*

a través del *Momentum angular*.

Nuestro objetivo de mediano plazo consiste en describir el movimiento de los *cuerpos rígidos*, estos son sencillamente sistemas de partículas en que las posiciones relativas de las partículas del sistema permanecen fijas.

En atención a los lineamientos generales que hemos mencionado introduciremos el concepto de Momentum angular como se aplica a los sistemas de partículas, para ello comenzaremos por recordar la definición del Momentum angular de una partícula y comentar algunos aspectos interesantes relacionados con ésta. El Momentum angular de una partícula con respecto a un origen está dado por

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad (4.1)$$

donde, \mathbf{r} es la posición de la partícula y \mathbf{p} su Momentum lineal.

Debido a su definición \mathbf{L} depende de la posición del origen de coordenadas. Para ver esto consideremos, el Momentum angular de una partícula medido desde dos sistemas de coordenadas cuyos orígenes (O y O') están en reposo relativo y se encuentran separados por el vector ($\mathbf{R}_{OO'}$).

Debido a que la velocidad relativa entre ambos sistemas de coordenadas es nula, los momenta (\mathbf{p} y \mathbf{p}') de la partícula en ambos sistemas son iguales. Sin embargo, los momenta angulares están dados por

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}, \quad y \quad (4.2)$$

$$\mathbf{L}' = (\mathbf{r} + \mathbf{R}_{OO'}) \times \mathbf{p}, \quad (4.3)$$

de manera que ambos momenta angulares difieren en $\mathbf{R}_{OO'} \times \mathbf{p}$ resultado que exhibe en forma explícita la dependencia del Momentum angular con la posición del origen de coordenadas, lo que obliga a ser cuidadosos al punto de tener que ser sumamente metódicos en la especificación del origen de coordenadas que va a utilizarse en cada cálculo.

Ejemplo 14 *Con el fin de aclarar nuestras ideas con respecto a Momentum angular consideremos un sistema extraordinariamente simple, una partícula que se mueve con velocidad constante de manera que su posición desde un cierto sistema de coordenadas está dada por*

$$\mathbf{r}(t) = (v_0 t + x_0) \hat{\mathbf{i}} + b \hat{\mathbf{j}} \quad (4.4)$$

es fácil demostrar que el Momentum angular de esta partícula en las coordenadas del sistema de referencia está dada por:

$$\mathbf{L} = -m v_0 b \hat{\mathbf{k}} \quad (4.5)$$

donde m es la masa de la partícula y b -la distancia perpendicular entre la trayectoria incidente y el origen de coordenadas- es conocido como parámetro de impacto.

Si reescribimos esta igualdad en la forma

$$\mathbf{L} = -m b^2 \frac{v_0}{b}, \hat{\mathbf{k}} \quad (4.6)$$

la expresión para el momentum angular de la partícula resulta idéntica a la de una partícula de masa m que rota con velocidad angular $\omega = v_0/b$ y radio b alrededor del origen.

Ejemplo 15 Recordemos otro sistema que hemos estado estudiando, la haltera: dos bolas pequeñas de masa m unidas por una barra rígida, sin masa, de longitud $2a$ y para el cual, la posición de las masas está dada por

$$x_1(t) = \nu_0 t + a \operatorname{sen} \phi, \quad y_1(t) = a \operatorname{cos} \phi \quad (4.7)$$

$$x_2(t) = \nu_0 t - a \operatorname{sen} \phi, \quad y_2(t) = -a \operatorname{cos} \phi. \quad (4.8)$$

Ya hemos mostrado que el momentum total y la energía del sistema son ($M = 2m$)

$$\mathbf{p} = M \nu_0 \hat{\mathbf{i}} \quad (4.9)$$

$$T = \frac{M \nu_0^2}{2} + \frac{m a^2 \dot{\phi}^2}{2} + \frac{m a^2 \dot{\phi}^2}{2}. \quad (4.10)$$

Calculemos ahora el momentum angular total del sistema con respecto al origen de coordenadas. Para ello basta con utilizar que el momentum angular total del sistema es la suma de los momenta angulares de cada componente del sistema y recordar como se calculan estos últimos. Para la partícula número 1 la expresión del momentum angular es

$$\mathbf{L}_1 = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1 = [(\nu_0 t + a \operatorname{sen} \phi) \hat{\mathbf{i}} + a \operatorname{cos} \phi \hat{\mathbf{j}}] \times m[(\nu_0 + a \dot{\phi} \operatorname{cos} \phi) \hat{\mathbf{i}} - a \dot{\phi} \operatorname{sen} \phi \hat{\mathbf{j}}], \quad (4.11)$$

utilizando la expresión correspondiente para la partícula 2 se encuentra el siguiente resultado final

$$\mathbf{L}_{total} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = 2 \left(m a^2 \dot{\phi} \right) \hat{\mathbf{k}} \quad (4.12)$$

que no es más que la suma de los dos momenta angulares medidos desde el centro de masa del sistema, que en términos de la cantidad $I = 2 m a^2$ que habíamos introducido anteriormente se puede expresar en la forma

$$\mathbf{L}_{total} = I \dot{\phi} \hat{\mathbf{k}} = I \boldsymbol{\omega}, \quad (4.13)$$

en donde estamos utilizando que la velocidad angular de la haltera con respecto a su eje de rotación es $\boldsymbol{\omega} = \dot{\phi} \hat{\mathbf{k}}$.

En resumen, podemos observar claramente que, como habíamos comentado en la introducción, el momentum angular describe aspectos del movimiento interno del sistema.

Ejemplo 16 Modifiquemos el problema anterior ligeramente cambiando el sistema de referencia a otro en el que la posición del centro de la barra esté dada por

$$\mathbf{r}_c(t) = \nu_0 t \hat{\mathbf{i}} + b \hat{\mathbf{j}} \quad (4.14)$$

Con respecto a estas nuevas coordenadas el centro de rotación del sistema tiene un parámetro de impacto b y no es muy difícil convencerse (**ejercicio**) de que sí se calcula el momentum angular del sistema se obtiene

$$\mathbf{L} = (-M b \nu_0 + I \dot{\phi}) \hat{\mathbf{k}} \quad (4.15)$$

De manera que el momentum angular del sistema se expresa como la suma del momentum angular de una partícula de masa M (la masa total del sistema) que viaja a lo largo de una dirección paralela al eje x con parámetro de impacto b , y el término que representa la suma de los momenta angulares del sistema con respecto al centro de masa del sistema.

Como hemos hecho en otras oportunidades vamos a expresar los resultados de los ejemplos que hemos estudiados en forma general.

Teorema 4 El Momentum angular de un sistema con respecto a un origen de coordenadas se expresa como la suma del Momentum angular del centro de masa del sistema con respecto al origen y los momenta angulares de las componentes del sistema con respecto al sistema del centro de masa, esto es

$$\mathbf{L}_{total} = \mathbf{r}_{CM} \times M \mathbf{V}_{CM} + \sum_i \mathbf{r}_i^{(c)} \times m_i \mathbf{v}_i^{(c)} \quad (4.16)$$

La prueba del teorema es relativamente directa y consiste en calcular el Momentum angular total del sistema en forma explícita de forma que

$$\mathbf{L}_{total} = \sum_i (\mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i), \quad (4.17)$$

expresando la posición de cada partícula en términos de la posición del centro de masa y la coordenada relativa respectiva ($\mathbf{r}_i = \mathbf{r} + \mathbf{r}_i^{(c)}$) se obtiene

$$\mathbf{L}_{total} = \sum_i \left[\mathbf{r} + \mathbf{r}_i^{(c)} \right] \times \left[m_i (\mathbf{V}_{CM} + \mathbf{v}_i^{(c)}) \right]. \quad (4.18)$$

Esta suma se descompone en cuatro términos de los cuales dos resultan ser nulos¹, a saber:

$$\mathbf{r} \times (\sum_i m_i) \mathbf{V}_{CM} = \mathbf{r} \times M \mathbf{V}_{CM} = \mathbf{L}_{CM} \quad (4.19)$$

$$\mathbf{r} \times \sum_i m_i \mathbf{v}_i^{(c)} = 0 \quad (4.20)$$

$$\sum_i m_i \mathbf{r}_i^{(c)} \times \mathbf{V}_{CM} = 0 \quad (4.21)$$

$$\sum_i \mathbf{r}_i^{(c)} m_i \mathbf{v}_i^{(c)} \equiv \mathbf{L}^{(c)} \quad (4.22)$$

en definitiva

$$\mathbf{L}_{total} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} + \sum_i \mathbf{L}_i^{(c)} \quad (4.23)$$

que es lo que queríamos probar.

4.3. Momento de Inercia

En nuestro ejemplo de estudio: la haltera que se desplaza rotando sobre una mesa hemos encontrado que la cantidad $I = 2 m a^2$ que evidentemente depende de la masa y la geometría del sistema aparece involucrada en las expresiones para la energía cinética “interna” $T = \frac{I \dot{\phi}^2}{2}$ y

¹Ejercicio de repaso: ¿por qué?

de su momentum angular con respecto al centro de masa: $\mathbf{L} = I \boldsymbol{\omega}$. El propósito de este sistema es generalizar esta noción a sistemas de mayor generalidad.

Consideremos un sistema de partículas que están distribuidas de manera simétrica con respecto a un eje y que se encuentra en estado de rotación pura alrededor de dicho eje, queremos calcular el Momentum angular en el sistema del centro de masa

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i^{(c)} \quad (4.24)$$

ya que como hemos aprendido en el teorema (4), la corrección a cualquier otro sistema de referencia está dada por el término $M\mathbf{r} \times \mathbf{p}$

En vista de la geometría del problema el centro de masa del sistema se encuentra en algún punto a lo largo de su eje de simetría lo que obviamente sugiere utilizar un sistema de coordenadas cilíndricas en cuyo origen se sitúe al centro de masa del sistema y cuyo eje z coincida su eje de simetría.

Como el sistema está rotando alrededor de su eje de simetría la velocidad de la i -ésima partícula del sistema en el sistema del CM es sencillamente

$$\mathbf{v}_i^{(c)} = \omega r_i^{(c)} \text{sen}\theta_i \hat{u}_\phi \quad , \quad (4.25)$$

donde ω es la velocidad angular, θ_i es el ángulo que el vector de posición² ($\mathbf{r}^{(c)}$) forma con el eje z y \hat{u}_ϕ es el vector de base de las coordenadas cilíndricas asociado al ángulo azimutal. De acuerdo a esto, el Momentum lineal \mathbf{L} de la partícula es

$$\mathbf{p}_i^{(c)} = m_i \omega r_i^{(c)} \text{sen}\theta_i \hat{u}_\phi \quad (4.26)$$

acá vale la pena observar que el producto $r_i^{(c)} \text{sen}\theta_i$ no es otra cosa que el radio de giro de la partícula, es decir, la distancia entre la partícula y el eje de rotación. Con el fin de simplificar la

²recuerde que en la notación que estamos usando: $r_i^{(c)} = |\mathbf{r}_i^{(c)}|$

notación eliminaremos la simbología ^(c) en el entendimiento de que todo el cálculo que estamos realizando está referido al centro de masa. Al calcular el Momentum angular de la partícula se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{L}_i &= (r_i \text{sen} \theta_i \hat{u}_\rho + r_i \text{cos} \theta_i \hat{\mathbf{k}}) \times m_i \omega r_{i\perp} \hat{u}_\phi = \\ &= m r_i^2 \text{sen}^2 \theta_i \omega \hat{\mathbf{k}} - m r_i^2 \text{sen} \theta_i \text{cos} \theta_i \omega \hat{u}_\rho\end{aligned}\quad (4.27)$$

ahora bien, en vista de que el sistema es simétrico cada partícula tiene una correspondiente, y en consecuencia al sumar sobre todas las partículas los términos radiales se cancelan entre si. En definitiva, el Momentum angular total del sistema resulta ser

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{L}_i = \left(\sum_i m_i r_i^2 \text{sen}^2 \theta_i \right) \omega \hat{\mathbf{k}} = I \boldsymbol{\omega}\quad (4.28)$$

donde hemos introducido la cantidad

$$I \equiv \sum_i m_i r_i^2 \text{sen}^2 \theta_i = \sum_i m_i r_{i\perp}^2 \quad ,\quad (4.29)$$

en que estamos utilizando el radio de giro de la partícula ($r_{i\perp} = r_i^{(c)} \text{sen} \theta_i$) en forma explícita.

En definitiva, hemos demostrado que si un sistema es simétrico con respecto a un eje, su Momentum y velocidad angulares son proporcionales. Como veremos más adelante, la cantidad I que recibe el nombre de *momento de inercia* da una medida de la resistencia que ofrece un sistema a que se cambie su estado de rotación, y en este sentido es el análogo angular de la masa.

En el caso de un sistema con una distribución continua de masa el resultado es el mismo y el momento de inercia se calcula con una integral:

$$I = \int r_\perp^2 dm \quad .\quad (4.30)$$

Nuestra presentación del momento de inercia difiere bastante de la que se consigue en la literatura usual en que el momento de inercia se introduce a través de un análisis de la energía

de un sistema físico rotante. Esto se hizo a propósito con el fin de destacar algo, si el sistema no es simétrico respecto al eje de rotación no hay una cancelación completa de las componentes radiales del Momentum angular total (\mathbf{L}), y por lo tanto este y la velocidad angular no resultan paralelos, lo que indica que de existir una relación de linealidad entre ambos esta no puede estar dada por una cantidad escalar.

4.4. Energía cinética de un Rígido

Consideremos un sistema rígido discreto, queremos calcularla energía cinética del sistema, antes hemos aprendido que en general

$$T = T_{CM} + T^{(rel)} \quad (4.31)$$

Para estudiar el problema dentro del nivel de este curso consideraremos que la orientación del sistema no cambia (es decir, que su eje de rotación permanece siempre con la misma orientación). La velocidad de cada partícula del sistema es

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V}_{CM} + \mathbf{v}_i^{(c)}, \quad (4.32)$$

pero, las partículas del sistema se encuentran en rotación pura con respecto al eje instantáneo de rotación que pasa por el centro de masa, de manera que

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{V}_{CM} + \mathbf{r}_{i\perp} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (4.33)$$

al calcular el cuadrado de \mathbf{v}_i y sumar los términos que hay que tomar en cuenta para calcular la energía cinética se obtiene

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \left(V_{CM}^2 + 2\mathbf{V}_{CM} \cdot \mathbf{v}_i^{(c)} + \mathbf{r}_{i\perp}^2 \omega^2 \right) = \\ &= \frac{M V_{CM}^2}{2} + \left(\sum_i \frac{m_i r_{i\perp}^2}{2} \right) \omega^2 = T_{CM} + \frac{I \omega^2}{2} \end{aligned} \quad (4.34)$$

4.5. Torque

Volvamos por un rato al estudio de una sola partícula y calculemos la tasa de cambio ($\dot{\mathbf{L}}$) de su Momentum angular medido con respecto a algun referencial. El resultado es bastante simple:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{p} + \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}} \quad . \quad (4.35)$$

El primero de los sumandos es nulo puesto que el Momentum lineal y la velocidad son paralelos mientras que en el segundo podemos utilizar la segunda ley de Newton para cambiar la tasa de cambio del Momentum lineal de la partícula por la fuerza neta que actúa sobre esta, y podemos concluir que

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad . \quad (4.36)$$

Este resultado motiva la siguiente

Definición 3 Consideremos una fuerza (\mathbf{F}) y su punto de aplicación, el torque de \mathbf{F} con respecto a un punto P es el producto vectorial

$$\boldsymbol{\tau} \equiv \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (4.37)$$

donde \mathbf{r} es la posición del punto de aplicación de \mathbf{F} con respecto a P .

Estudiemos ahora la tasa de cambio del Momentum angular total de un sistema de partículas y su relación con la definición del torque (o par asociado a una fuerza).

Como antes, el Momentum angular total de un sistema es

$$\mathbf{L} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{p}_i \quad (4.38)$$

pretendemos calcular la rata de cambio de \mathbf{L} antes de llevar a cabo cualquier simplificación, al diferenciar obtenemos:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (4.39)$$

donde hemos utilizado la misma técnica de cálculo que en el caso de una partícula, ahora bien, la fuerza sobre la i -ésima partícula es

$$\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \quad (4.40)$$

y por lo tanto

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \right) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(ext)} + \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} \quad . \quad (4.41)$$

El segundo sumando se puede reescribir de forma divertida:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} + \sum_{i,j} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ij} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[\sum_{i,j} \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{ji} - \sum_{i,j} \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{ji} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i,j} (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{ji} \end{aligned} \quad (4.42)$$

ahora bien, si las fuerzas internas entre las partículas del sistema son centrales las \mathbf{F}_{ji} serán paralelas a los vectores $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ y por lo tanto el sumando será nulo. En ese caso y solo en ese caso, la derivada del Momentum angular total del sistema resulta ser:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \left(\mathbf{F}_i^{(ext)} + \sum_{j \neq i} \mathbf{F}_{ji} \right) = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i^{(ext)} \quad . \quad (4.43)$$

De manera que la derivada temporal del Momentum angular de un sistema no es otra cosa que la suma de los torques externos que actúan sobre el sistema.

La ecuación (4.43) constituye el análogo rotacional de la segunda ley de Newton $\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{F}$. En este curso nos limitaremos a estudiar sistemas sencillos compuestos por *cuerpos rígidos* en rotación alrededor de un eje cuya orientación se mantenga fija.

Problema 10 Una bola de boliche de radio R y masa M (distribuida uniformemente) es lanzada a la cancha (una superficie horizontal). Inicialmente la bola desliza sin rotación y la rapidez inicial de su centro es v_0 . Conociendo el coeficiente de roce dinámico (μ_k) entre la cancha y la bola, encuentre

1. El tiempo que tarda la bola en comenzar a rodar sin deslizar
2. La velocidad angular de la bola cuando comience a rodar sin deslizar.
3. El trabajo efectuado por el roce dinámico entre el punto de contacto inicial la cancha y la bola y el punto en que esta comienza a rodar sin deslizar.

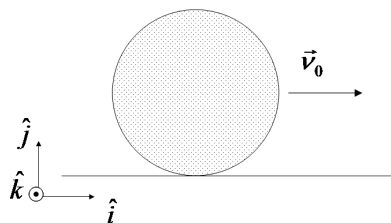


Figura 4.2: La bola en su condición inicial, mostramos la orientación del sistema cartesiano que utilizaremos

Utilizando el sistema de referencia que se muestra en la figura las ecuaciones de movimiento para la esfera son³:

1. Traslacionales del centro de masa

$$M \ddot{x} = \lambda_{\parallel} \quad (4.44)$$

$$\lambda_{\perp} = Mg \quad (4.45)$$

$$(4.46)$$

³La reacción del piso sobre la bola es: $\mathbf{\Lambda} = \lambda_{\parallel} \hat{i} + \lambda_{\perp} \hat{j}$

2. Rotacionales (hemos escogido que en cada instante de tiempo el eje instantáneo de rotación sea un eje paralelo a \hat{k} que pasa por el centro de la esfera)

$$I \ddot{\phi} = R \lambda_{||}. \quad (4.47)$$

El vínculo de rodadura: $\mathbf{V} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = 0$ (donde P es el punto de contacto de la bola con la cancha se traduce en $V \hat{i} + \dot{\phi} R \hat{k} \times (-\hat{j}) = (V + R \dot{\phi}) = 0$, ó

$$V = -R \dot{\phi}, \quad (4.48)$$

de acá sigue que -al rodar sin deslizar- las componentes de la aceleración del centro de la esfera y de la aceleración angular están relacionados por

$$\ddot{x} = -R \ddot{\phi}. \quad (4.49)$$

Por otra parte el roce es dinámico porque en el trayecto que nos ocupa el punto de contacto (P) de la bola con la cancha desliza en el sentido $+x$, de manera que podemos asegurar que la componente de la reacción paralela a la cancha (el roce), tiene que ser antiparalelo a \hat{i} , es decir, $\lambda_{||} = -\mu_k |\lambda_{\perp}| = -\mu_k m g$.

En definitiva, estas son las ecuaciones de movimiento que incorporan toda la información

$$M \ddot{x} = -\mu_k M g \quad (4.50)$$

$$\lambda_{\perp} = M g \quad (4.51)$$

$$I \ddot{\phi} = -R \mu_k M g. \quad (4.52)$$

La ecuación 4.50 puede integrarse para encontrar la componente x de la velocidad en función del tiempo (fis-1) resultando

$$\dot{x} = v_0 - \mu_k g t \quad (4.53)$$

mientras que la ecuación de los torques nos permite encontrar la fórmula de evolución de la componente de la velocidad angular (recuerde que la velocidad angular inicial es nula)

$$\dot{\phi} = -\frac{M R}{I} \mu_k g t. \quad (4.54)$$

El vínculo de rodadura se satisface para el instante (τ) en que se satisfaga la igualdad

$$\nu_0 - \mu_k g \tau = \frac{M R^2}{I} \mu_k g \tau, \quad (4.55)$$

ó

$$\nu_0 = \left(\mu_k g + \frac{M R^2}{I} \mu_k g \right) \tau. \quad (4.56)$$

$$\nu_0 = \frac{I + M R^2}{I} \mu_k g \tau. \quad (4.57)$$

Ahora bien, el análisis dimensional implica que el momento de inercia puede expresarse como

$$I = f M R^2, \quad (4.58)$$

donde f es un factor numérico adimensional, de esta manera, al despejar τ obtenemos

$$\tau = \frac{f \nu_0}{(1 + f) \mu_k g}, \quad (4.59)$$

en el caso de la esfera $f = 2/5$ luego

$$\tau = \frac{2}{7} \frac{\nu_0}{\mu_k g}. \quad (4.60)$$

En el instante (τ) en que comience la rodadura sin deslizamiento, la velocidad angular de la esfera será

$$\boldsymbol{\omega} = -\frac{\mu_k}{f R} g \tau \hat{k} = -\frac{5}{2} \frac{\mu_k}{R} g \frac{2}{7} \frac{\nu_0}{\mu_k g} \hat{k} = -\frac{5}{7} \frac{\nu_0}{R} \hat{k}. \quad (4.61)$$

Podemos utilizar el vínculo de rodadura para encontrar la velocidad del centro de la esfera para $t \geq \tau$ (mientras ocurra el movimiento con rodadura sin deslizamiento), obteniéndose sencillamente:

$$\mathbf{V} = \dot{x}(\tau) \hat{i} = -R \dot{\phi}(\tau) = \frac{25}{49} \nu_0 \hat{i} \quad t \geq \tau \quad (4.62)$$

La energía cinética al comenzar la rodadura sin deslizamiento es

$$T = \frac{I \omega^2(\tau)}{2} + \frac{M \dot{x}^2(\tau)}{2} = \left(\frac{I}{2R^2} + \frac{M}{2} \right) \dot{x}^2(\tau), \quad (4.63)$$

sustituyendo los valores que hemos calculado hasta ahora encontramos

$$T = \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) M \frac{25}{49} \nu_0^2 \quad (4.64)$$

mientras que la energía cinética inicial era $T_i = M \nu_0^2/2$

La diferencia entre ambas cantidades es

$$T - T_i = \left\{ \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{2} \right) \frac{25}{49} - \frac{1}{2} \right\} M \nu_0^2 < 0 \quad (4.65)$$

De acuerdo al teorema del trabajo y la energía esta cantidad es igual al trabajo hecho por el roce.

4.6. Complemento: ¿Qué pasa si no hay simetría?

Para entender lo que ocurre estudiemos un problema particular,

Problema 11 *El centro de la barra de una haltera de longitud $2a$ está soldada a un eje, la unión está hecha de tal forma que la barra y el eje forman un ángulo constante θ_0 . La haltera rota alrededor del eje a una tasa de giro constante (ω_0) . Suponiendo que la masa de la barra de la haltera es despreciable y que las masas que se encuentran en los extremos de la haltera son iguales (m).*

1. Encuentre la velocidad angular de la haltera.
2. Determine el momentum angular del sistema.
3. Encuentre el torque.

4. Discuta el caso en que $\theta_0 \rightarrow \pi/2$

Comencemos por establecer un sistema de coordenadas cartesianas cuyo origen es el punto en que la haltera está soldada al eje de rotación y cuyo eje z es paralelo a dicho eje rotacional.

Escogido este sistema de coordenadas resulta evidente que la velocidad angular del sistema es

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_0 \hat{\mathbf{k}} \quad (4.66)$$

Tomemos ahora un sistema de coordenadas cilíndricas asociado al sistema cartesiano que introdujimos antes, entonces, la posición de ambas pesas es

$$\mathbf{r}_{\pm} = \pm \rho_0 \hat{\mathbf{u}}_{\rho} \pm h_0 \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.67)$$

donde: $\rho_0 = a \operatorname{sen}\theta_0$, $h_0 = a \operatorname{cos}\theta_0$, y $\hat{\mathbf{u}}_{\rho}$ es el vector radial asociado a una de las dos masas. En consecuencia, los momenta de las masas son

$$\mathbf{p}_{\pm} = \pm m \rho_0 \omega_0 \hat{\mathbf{u}}_{\phi}, \quad (4.68)$$

y por lo tanto el momentum angular total está dado por

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= 2 \left(\rho_0 \hat{\mathbf{u}}_{\rho} + h_0 \hat{\mathbf{k}} \right) \times m \rho_0 \omega_0 \hat{\mathbf{u}}_{\phi} \\ &= -2 m \rho_0 h_0 \omega_0 \hat{\mathbf{u}}_{\rho} + 2 m \rho_0^2 \omega_0 \hat{\mathbf{k}}, \end{aligned} \quad (4.69)$$

en definitiva,

$$\mathbf{L} = -2 m a^2 \operatorname{sen}\theta_0 \operatorname{cos}\theta_0 \omega_0 \hat{\mathbf{u}}_{\rho} + 2 m a^2 \operatorname{sen}^2\theta_0 \omega_0 \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.70)$$

Una de las cosas interesantes que se pueden aprender de este problema consiste en el hecho de que la velocidad y el momentum angular no son paralelos. Esto es consecuencia de que la geometría del objeto en rotación no es simétrica con respecto al eje de rotación, y es lo que

nos permite asegurar que el *momento de inercia* no es un escalar (si lo fuera, el momentum angular y la velocidad angular de cualquier sistema deberían ser paralelos y tal cosa no ocurre en este caso). Si soldaramos otra haltera idéntica a la primera al eje en una configuración que produjera que las posiciones de las dos nuevas masas estuvieran en posiciones simétricas con respecto al eje z de las masas originales, la componente radial del momentum angular se cancelaría y obtendríamos que $\mathbf{L} = 4 m a^2 \text{sen}^2\theta_0 \omega_0 \hat{\mathbf{k}}$.

Otra observación interesante es esta: en vista de que el vector $\hat{\mathbf{u}}_\rho$ es ortogonal al eje z y que rota con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ alrededor de este, el momentum angular describe un cono alrededor de la velocidad angular, realizando un movimiento denominado: *precesión*.

El siguiente cálculo de interés, el del torque, se lleva a cabo sin ninguna dificultad diferenciando el momentum angular para obtener

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{L}} = -2 m a^2 \text{sen}\theta_0 \text{cos}\theta_0 \omega_0^2 \hat{\mathbf{u}}_\phi. \quad (4.71)$$

Acá hay otra cosa interesante, el torque aparece asociado a la componente no constante de \mathbf{L} (la componente radial) lo que significa que en este caso y aún cuando la velocidad angular es constante hay que realizar un esfuerzo para mantener el estado de rotación del sistema (esto no ocurre en un movimiento lineal, una vez que un cuerpo se mueve a velocidad constante no hay que hacer nada para mantener el movimiento).

Si $\theta_0 \rightarrow \pi/2$ la haltera rota en un plano horizontal y en ese caso la configuración del sistema es simétrica con respecto al eje de rotación debido a lo cual el momentum angular debería ser paralelo a la velocidad angular. Esto es exactamente lo que sucede. Basta con tomar el límite en la ec. 4.70 donde se obtiene

$$\lim_{\theta_0 \rightarrow \pi/2} \mathbf{L} = \lim_{\theta_0 \rightarrow \pi/2} \left(-2 m a^2 \text{sen}\theta_0 \text{cos}\theta_0 \omega_0 \hat{\mathbf{u}}_\rho + 2 m a^2 \text{sen}^2\theta_0 \omega_0 \hat{\mathbf{k}} \right) = 2 m a^2 \omega_0 \hat{\mathbf{k}}, \quad (4.72)$$

en este caso la componente no constante del momentum angular desaparece y en consecuencia no hay que hacer ningún esfuerzo para mantener el estado de movimiento de nuestro sistema

de estudio.